Eksamen FY1005/TFY4165 Termisk fysikk kl 09.00 - 13.00 mandag 2. juni 2014

Bokmål

Oppgave 1. Ti flervalgsoppgaver. (Poeng: 2.5×10=25)

a. For van der Waals tilstandsligning, $\left(p + aN^2/V^2\right)(V - Nb) = NkT$, hvilket utsagn er feil?

A Denne tilstandsligningen kan brukes til å fastlegge trippelpunktet til et stoff.
B Leddet aN^2/V^2 tar hensyn til at nøytrale molekyler tiltrekker hverandre når de er et stykke fra hverandre.
C Leddet Nb tar hensyn til at molekylene har et visst volum, og at de ikke er punktpartikler.
D Denne tilstandsligningen kan, med Maxwells regel om like arealer, beskrive koeksistens mellom gass- og væskefasen av et stoff.

b. Du har gjort termodynamiske målinger på vann ved romtemperatur og normalt trykk (300 K, 1 atm) og bestemt følgende verdier for henholdsvis volumutvidelseskoeffisient og isoterm kompressibilitet: $2.6 \cdot 10^{-4}$ K^{-1} og $4.6 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}. Hvor stor er da trykk-koeffisienten ($\alpha_p = (\partial p/\partial T)_V/p$, målt i enheten K^{-1}) til vann ved disse betingelsene? (Tips: Syklisk regel.)

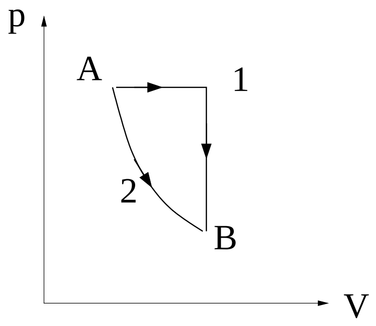
A 0.18
B 5.6
C 180
D 560

c. I kinetisk gassteori, hvordan går man fram for å bestemme trykket i en ideell gass?

A Ved å innse at det ikke strømmer noe varme ut av et isolert system.
B Ved å bestemme molekylenes akselerasjon, og deretter benytte Newtons 2. lov, $F = ma$.
C Ved å bestemme hvor mange molekyler som støter mot en vegg pr tidsenhet samt impulsendringen pr støt, og deretter benytte Newtons 2. lov, $F = dp/dt$.
D Ved å bestemme gassens kinetiske energi før og etter at den har utført et arbeid ved å flytte en av beholderens vegger en lengde Δx.

d. Hvilken påstand er feil?

A Det er mulig å overføre varme fra et kaldt legeme til et varmere legeme.
B Det er ikke mulig med prosesser der eneste resultat er at varme avgis fra et varmereservoar og omsettes fullstendig i arbeid.
C Det er mulig å omdanne arbeid i sin helhet til varme.
D 2. hovedsetning er en direkte konsekvens av 1. hovedsetning.

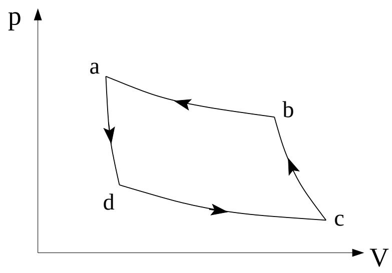


e. Et system kan bringes reversibelt fra tilstand A til tilstand B på to ulike måter: Ved hjelp av en kombinasjon av en isobar og en isokor prosess (1) eller via en isoterm prosess (2). Systemets entropiendring er S_1 for prosess 1 og S_2 for prosess 2. Da er

A det ikke mulig å uttale seg om S_1 i forhold til S_2.
B $S_1 > S_2$
C $S_1 < S_2$
D $S_1 = S_2$

f. Ett mol ideell gass er innestengt i en varmeisolert beholder med volum 3 L. En vegg fjernes hurtig, slik at gassen utvider seg isotermt (og irreversibelt), til et volum 15 L. Hva blir endringen ΔS i gassens entropi? (Oppgitt: Isoterm entropiendring er $dS = (\partial p/\partial T)_V \, dV$)

A $\Delta S = 5.2$ J/K
B $\Delta S = 13.4$ J/K
C $\Delta S = -3.6$ J/K
D $\Delta S = 34.7$ J/K



g. Figuren viser en reversibel kretsprosess der arbeidssubstansen er en gass. Hva kan du si om netto varme avgitt av arbeidssubstansen pr syklus (til omgivelsene) i denne kretsprosessen?

A Den er lik null.
B Den er negativ.
C Den er positiv.
D Intet kan sies om dette ut fra figuren.

h. I et strålingshulrom (dvs et hulrom med en gass av fotoner) med volum V og temperatur T er indre energi U proporsjonal med V og T^4, mens trykket p er proporsjonalt med indre energi pr volumenhet. Hvordan blir da formen på en isoterm i et p, V-diagram, dvs $p(V)$ for konstant T?

A En parabel.
B En hyperbel.
C En horisontal kurve.
D En lineær kurve med negativ helning.

i. I et ikke helt tomt strålingshulrom (vakuumkammer) er trykket fra en atomær (og ideell) edelgass mot de perfekt svarte veggene $p_a = 1\,\mu$Pa. Hva er temperaturen i hulrommet (og veggene) dersom atomene og fotonene bidrar like mye til hulrommets indre energi?

A 4.2 K B 77 K C 211 K D 5800 K

j. Nitrogenmolekylet, N_2, har mulige (tillatte) rotasjonsenergier

$$K_{\text{rot}}^{(j)} = \frac{j(j+1)\hbar^2}{2I_0} \quad , \quad j = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Her er $I_0 = 2m_N r_N^2$ molekylets treghetsmoment med hensyn på akser som står normalt på molekylets sylindersymmetriakse, og som passerer gjennom molekylets massesenter. Bindingslengden i nitrogenmolekylet er ca 0.1 nm, og molekylmassen er $28u$. La π_j angi sannsynligheten for at et gitt nitrogenmolekyl er i rotasjonstilstand j, med rotasjonsenergi $K_{\text{rot}}^{(j)}$. Hva er da forholdet π_1/π_0 ved romtemperatur?

A ca 100 B ca 1 C ca 0.01 D ca 10^{-4}

<u>Oppgave 2.</u> Fjernvarmeanlegg. (Poeng: 6+6+6+7=25)

Den 16. oktober 2013 åpnet Statkraft et nytt fjernvarmeanlegg ved Universitetet for miljø- og biovitenskap på Ås. Forbrenning av flis og bioolje gir oppvarming av vann, og varmen distribueres til kundene ved å sende det varme vannet gjennom et godt isolert rør gravd ned i bakken. Ved full utnyttelse leverer forbrenningsanlegget en effekt $P = 5$ MW. Rørsløyfa er 8 km lang, og røret har en indre radius $R_2 = 13.4$ cm. Rundt røret ligger det et lag med isolasjon, med varmeledningsevne $\kappa = 0.027$ W/m·K, slik at ytre radius (vannrør + isolasjon) er R_1.

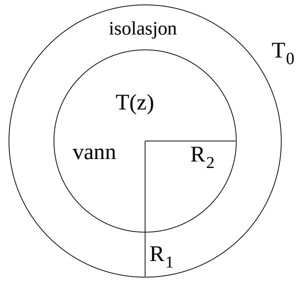
<u>a</u>. Når kundene henter ut varme langs rørsløyfa, må den produserte varmen (5 MW) typisk heve temperaturen i vannet med 30 K. Hvor mange liter (L) vann kan da passere gjennom anlegget pr sekund? Hva blir i såfall vannets strømningshastighet v i røret? For midlere varmekapasitet til vann pr volumenhet i det aktuelle temperaturområdet kan du bruke $c = \Delta Q/(\Delta V\, \Delta T) = 4.2 \cdot 10^6$ J/m^{3}K (= 4200 J/L K).

I resten av oppgaven betrakter vi forholdene når kundene ikke henter ut varme langs rørsløyfa. Vannet avkjøles likevel litt på sin vei gjennom røret, på grunn av varmeledning gjennom isolasjonslaget. Det kreves at dette varmetapet ikke skal utgjøre mer enn ca 5%, noe som betyr at temperaturen i vannet ikke kan reduseres med mer enn 2 K på sin vei gjennom det 8 km lange røret.

<u>b</u>. Temperaturen i bakken omkring røret (dvs for $r > R_1$) er T_0 og antas konstant. Vannets temperatur i avstand z fra anlegget er $T(z)$ og antas konstant over et tverrsnitt av vannet (dvs for $r < R_2$). Vis at varme avgitt pr tidsenhet, og pr lengdeenhet av røret, i avstand z fra fjernvarmeanlegget, da kan skrives på formen

$$\frac{đQ/dt}{L} = \alpha\,[T(z) - T_0],$$

og fastlegg dermed koeffisienten α (dvs: bestem α uttrykt ved oppgitte størrelser).



Tips: Bruk Fouriers lov for stasjonær (tidsuavhengig) varmeledning gjennom sylinderflate med lengde L og radius r. Med sylindersymmetri er $\boldsymbol{j} = \hat{r} j(r)$ og $\nabla T = \hat{r}\, dT/dr$.

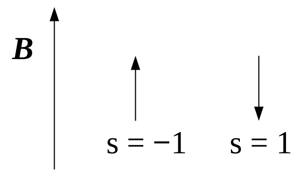
<u>c</u>. Vi har konstant vanntemperatur $T(z)$ i en gitt avstand z fra anlegget, men følger vi en gitt vannmengde, avtar temperaturen med tiden t, og dermed med avstanden z. Kjenner vi vannets hastighet $v = dz/dt$, kan $T(t)$ for den gitte vannmengden relateres til $T(z)$. Vis at avgitt varme pr tids- og lengdeenhet kan skrives på formen

$$\frac{đQ/dt}{L} = -\gamma\,\frac{dT}{dz},$$

og fastlegg dermed koeffisienten γ (dvs: bestem γ uttrykt ved oppgitte størrelser).
Tips: $đQ = -C\,dT$.

<u>d</u>. Anta at temperaturen nede i bakken ikke blir lavere enn $T_0 = -5$°C. Anta videre at vannets temperatur ut fra anlegget er $T(z = 0) = 95$°C. Det kreves med andre ord at temperaturen inn i anlegget skal være $T(z = 8\text{ km}) = 93$°C. Kombiner de to uttrykkene i **<u>b</u>** og **<u>c</u>**, løs den resulterende differensialligningen for $T(z)$, og bestem nødvendig tykkelse $d = R_1 - R_2$ på isolasjonslaget for gitte temperaturbetingelser og oppgitte tallverdier for øvrig.
Tips: Det oppgis at $\gamma/\alpha \simeq 982 \ln(R_1/R_2)$ i enheten kilometer (i tilfelle du ikke har funnet uttrykkene for α og/eller γ tidligere i oppgaven).

Oppgave 3. Ideell paramagnet. (Poeng: 7+6+7=20)



Et elektron har kvantisert magnetisk moment

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m_e}\,\boldsymbol{S}.$$

Her er $-e$, m_e og $\boldsymbol{S}$ hhv ladningen, massen og spinnet til elektronet.

I et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ vil elektronspinnets komponent S_z i magnetfeltets retning kun ha to mulige verdier, $\pm\hbar/2$, slik at den potensielle energien $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ (kjent fra grunnleggende magnetostatikk) kun kan ha verdiene $E_- = -\mu_B B$ eller $E_+ = \mu_B B$, svarende til at $\boldsymbol{\mu}$ peker i hhv samme retning som $\boldsymbol{B}$ eller motsatt retning av $\boldsymbol{B}$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ en såkalt Bohr-magneton.

I termisk likevekt er sannsynligheten $p(s)$ for at et elektron befinner seg i den ene eller den andre av de to mulige tilstandene (med $s = \pm 1$ svarende til $E_\pm$)

$$p(s) = C\,e^{-sx},$$

dvs proporsjonal med *Boltzmannfaktoren*. Her er C en normeringskonstant, og $x = \mu_B B/kT$ er en dimensjonsløs størrelse som angir spinnets potensielle energi i magnetfeltet dividert med termisk energi kT.

a. Hva er partisjonsfunksjonen z (pr partikkel)? Vis at normeringskonstanten er $C = 1/(2\cosh x)$. Bestem elektronets midlere energi (som her blir indre energi pr partikkel) $u = \langle E\rangle = \sum_s E_s\,p(s)$. Hva blir u for meget lave temperaturer, dvs $kT \ll \mu_B B$? Er dette svaret rimelig?

b. Bestem elektronets midlere magnetiske moment $m = \langle\mu\rangle/\mu_B$, gjort dimensjonsløst ved å dividere med μ_B. Vis at resultatet er i samsvar med Curies lov, $m \sim 1/T$, for høye temperaturer.

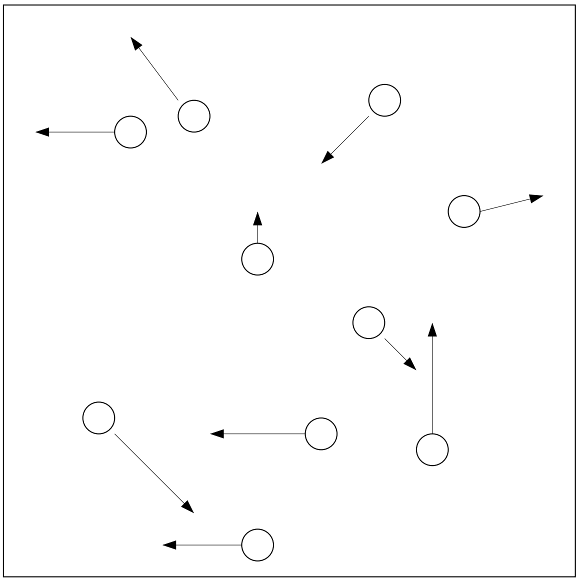
Entropien σ pr elektron, uttrykt ved midlere magnetiske moment m, er

$$\sigma(m) = k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right].$$

c. Hva blir (til ledende orden) m og σ dersom magnetfeltet er meget sterkt, dvs $\mu_B B \gg kT$? Hva blir m og σ dersom magnetfeltet skrus helt av, dvs $B = 0$? Vurder om σ i disse to grensetilfellene er som forventet, i lys av Boltzmanns definisjon av entropi (se formelvedlegget).

Oppgitt:
$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\tanh x = \sinh x/\cosh x$
$\sinh x \simeq x$, $\cosh x \simeq 1$ og $\tanh x \simeq x$ når $x \ll 1$
$\tanh x \simeq 1$ når $x \gg 1$
$x\ln x \to 0$ når $x \to 0$

Oppgave 4. Maxwells hastighetsfordeling. (Poeng: 6+6+8=20)



Under forutsetning av (i) at ingen retninger er spesielt foretrukne, og (ii) at de ulike komponentene av hastigheten er statistisk uavhengige, så vil lette, runde plastskiver som svever på et luftputebord (og som reflekteres ved luftputebordets vegger) ha hastigheter som oppfyller Maxwellfordelingen. Med andre ord, sannsynligheten for at en gitt skive har hastighetskomponent i x-retning mellom v_x og $v_x + dv_x$ er

$$g(v_x)\, dv_x = \sqrt{\frac{B}{\pi}} e^{-B\, v_x^2}\, dv_x,$$

og sannsynligheten for at en gitt skive har hastighetskomponent i y-retning mellom v_y og $v_y + dv_y$ er

$$g(v_y)\, dv_y = \sqrt{\frac{B}{\pi}} e^{-B\, v_y^2}\, dv_y.$$

Her er B en parameter som må tilpasses den målte hastighetsfordelingen.

a. Hva blir sannsynligheten $F(\boldsymbol{v})\, d^2v$ for at en gitt skive har hastighetsvektor mellom $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ og $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y)$? Hva blir sannsynligheten $f(v)\, dv$ for at en gitt skive har fart (dvs $|\boldsymbol{v}|$) mellom v og $v + dv$? (Tips: I kartesiske koordinater: $d^2v = dv_x\, dv_y$. I polarkoordinater: $d^2v = v\, d\phi\, dv$.)

b. Hva blir midlere kvadratiske hastighet $\langle v^2 \rangle$ (uttrykt ved parameteren B)?
Tips: Regn ut en midlere kvadratisk hastighetskomponent og bruk isotropi. Se formelvedlegg for nødvendige gauss-integraler.

c. Anta at du har "filmet" bevegelsen til 10 identiske plastskiver på et luftputebord over et tidsrom på 10 sekunder med et hurtigkamera som tar 20 bilder pr sekund. Du har dermed 10 datafiler til rådighet, en fil pr plastskive, der hver fil inneholder 200 rader a 3 tall, t, x og y, dvs hhv tidspunkt, x-posisjon og y-posisjon for den gitte skiven.
Forklar hvordan du vil gå fram for å undersøke om disse 10 plastskivene faktisk har hastigheter som oppfyller Maxwellfordelingen. Direkte programmering er ikke nødvendig. Bruk ordinær tekst og enkle ligninger. Det skal gå fram (i) hvordan du bestemmer en skives hastighet langs dens bane, og (ii) hvordan du vil velge å framstille fordelingen av hastigheter. Anslagsvis en halv side bør være tilstrekkelig.

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isoterm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_p = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$đQ = dU + đW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{đQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \qquad F = U - TS \qquad G = H - TS \qquad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$đQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \qquad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:
Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \qquad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left|\frac{Q_{\mathrm{ut}}}{W}\right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left|\frac{Q_{\mathrm{inn}}}{W}\right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{đQ_{\mathrm{rev}}}{T} \qquad \oint dS = 0 \qquad \oint \frac{đQ}{T} \leq 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \qquad (N \to \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\max} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j}\right)_{p,T,N_{i\neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\mathrm{mix}} = -k \sum_j N_j \ln x_j \qquad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

(Clausius-)Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Strålingshulrom, frekvensfordeling:

$$\frac{du}{df} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad ; \quad u(T) = \int_0^{\infty} \frac{du}{df}\, df$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$j_s(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \qquad (\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2)$$

Fouriers lov:

$$\boldsymbol{j} = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$\boldsymbol{j} = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U-verdi:

$$j = U \Delta T$$

Midlere fri veilengde, fortynnet gass ($n = N/V$; σ = spredningstverrsnitt):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$$

Varmeledningsevne, fortynnet gass (c_V = varmekapasitet pr molekyl; m = molekylmasse):

$$\kappa = \frac{2c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstant, fortynnet gass:

$$D = \frac{2}{3n\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} = \frac{\kappa}{n c_V}$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned}
k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\
R &= 8.314 \text{ J/molK} \\
N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\
\hbar &= h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
c &= 3.00 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \\
\sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4
\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}
1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
1 \text{ Å} &= 10^{-10} \text{ m} \\
1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\
1 \text{ bar} &= 10^{5} \text{ Pa} \\
1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^{5} \text{ Pa}
\end{aligned}$$