

Oppgave 1

For enatomig gass har vi $c_{pm} = 5R/2$ og $c_{Vm} = 3R/2$, slik at $\gamma = C_p/C_V = 5/3$. Langs adiabaten er det (pr definisjon) ingen varmeutveksling med omgivelsene, $Q_{ab} = 0$. Fra c til a er volumet konstant slik at det ikke utføres noe arbeid, $W_{ca} = 0$. Trykket økes, som betyr at temperaturen også øker. Altså øker gassens indre energi fra c til a, og denne energien må da komme fra tilført varme, dvs $Q_{ca} > 0$. Fra b til c komprimeres gassen (til halvt volum) ved konstant trykk ($p_c = p_b$). Det betyr at gassen har utført et negativt arbeid på omgivelsene, $W_{bc} < 0$. Det er videre klart at temperaturen i c er lavere enn i b, siden produktet pV er mindre i c enn i b (halvparten så stort). Følgelig er indre energi redusert fra b til c, og det er klart at $Q_{bc} = \Delta U_{bc} + W_{bc} < 0$, dvs varme avgitt til omgivelsene.

Virkningsgraden er pr definisjon lik forholdet mellom netto utført arbeid W og tilført varme Q_{ca} ,

$$\eta = \frac{W}{Q_{ca}} = \frac{Q_{ca} + Q_{bc}}{Q_{ca}},$$

der vi i siste overgang benyttet oss av at indre energi er en tilstandsfunksjon, slik at netto utført arbeid tilsvarer netto tilført varme. Her tilføres og avgis varme ved hhv konstant volum og konstant trykk, så vi har direkte

$$\begin{aligned} Q_{ca} &= C_V(T_a - T_c) = \frac{3}{2}nR(T_a - T_c), \\ Q_{bc} &= C_p(T_c - T_b) = -\frac{5}{2}nR(T_b - T_c). \end{aligned}$$

Vi har allerede slått fast at $p_b V_b = 2p_c V_c$ slik at $T_b = 2T_c$. Langs adiabaten har vi

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} \Rightarrow T_a = T_b \left(\frac{V_b}{V_a} \right)^{\gamma-1} = 2^{\gamma-1} T_b,$$

dvs $T_a = 2^\gamma T_c$. Virkningsgraden blir følgelig

$$\eta = 1 + \frac{Q_{bc}}{Q_{ca}} = 1 - \frac{5}{3} \frac{T_b - T_c}{T_a - T_c} = 1 - \frac{5}{3} \frac{T_b/T_c - 1}{T_a/T_c - 1} = 1 - \frac{5}{3} \frac{2 - 1}{2^{5/3} - 1} \simeq 0.23.$$

En Carnotmaskin som opererer mellom et varmt reservoar med temperatur T_a og et kaldt reservoar med temperatur T_c ville ha virkningsgraden

$$\eta_C = 1 - T_c/T_a = 1 - 2^{-5/3} \simeq 0.69,$$

som altså er maksimal teoretisk virkningsgrad.

Som nevnt i oppgaveteksten kan arbeidet bestemmes ved å integrere $p(V)dV$. Langs adiabaten må en da benytte seg av at pV^γ er konstant. Fra b til c blir arbeidet ganske enkelt $p_b(V_a - V_b)$. Dette gir totalt arbeid uttrykt ved $p_b V_b$, som med ideell gass tilstandsligning kan erstattes med nRT_b , og her kan nR uttrykkes ved γ og C_V . Men tilført varme vil, som ovenfor, i utgangspunktet være uttrykt ved T_a og T_c , så en kommer ikke utenom å uttrykke disse ved T_b , slik vi gjorde ovenfor.

Oppgave 2

Kraftverkets virkningsgrad er

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{|Q_1| + W},$$

der Q_1 er avgitt varme som dumpes i elva. Oppgaven etterspør *effekter*, dvs energier pr tidsenhet, så la oss si at Q og W angir hhv varme og elektrisk energi (arbeid) pr tidsenhet, dvs varmeeffekt og elektrisk effekt. Vi løser ligningen ovenfor med hensyn på W og finner at kraftverket maksimalt kan levere en elektrisk effekt

$$W = \frac{\eta}{1 - \eta} |Q_1| = \frac{0.4}{0.6} \cdot 1500 \text{ MW} = 1000 \text{ MW}.$$

Dette krever tilførsel av en varmeeffekt

$$Q_2 = W + |Q_1| = 2500 \text{ MW}.$$

Vannets spesifikke varmekapasitet kan skrives som

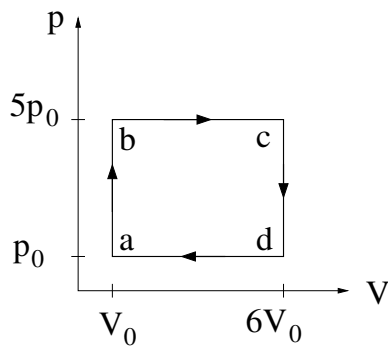
$$c = \frac{|Q_1|}{\Delta T \cdot M},$$

og hvis $|Q_1|$ her representerer varme pr tidsenhet, med enheten J/s, må M tilsvare forbipassert masse vann pr tidsenhet, med enheten kg/s. Nødvendig vannføring for å begrense ΔT til 5 K blir derfor

$$M = \frac{|Q_1|}{c \cdot \Delta T} = \frac{1500 \cdot 10^6 \text{ J/s}}{4184 \text{ J/kgK} \cdot 5 \text{ K}} \simeq 71.7 \cdot 10^3 \text{ kg/s} \simeq 72 \text{ tonn/s}.$$

Oppgave 3

a)
 $\varepsilon_K = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)|$. Vi bruker at $Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0$, dvs $Q_2 = -Q_1 T_2/T_1$, som innsatt i uttrykket for ε_K gir $\varepsilon_K = |T_1/(T_1 - T_2)| = 277/9 \simeq 31$.



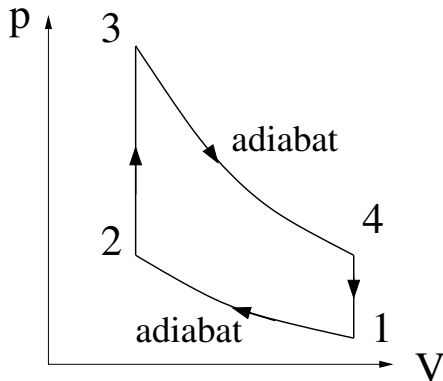
b)
$$W = 4p_0 \cdot 5V_0 = 20 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 10^4 = 10 \text{ kJ}.$$

c)
 T_a er minst, T_c er størst. Siden T er proporsjonal med pV , er $T_b/T_d = p_b V_b / p_d V_d = 5/6$, dvs $T_b < T_d$.

B) $T_a < T_b < T_d < T_c$

d)
 Siden $p_b V_b = 5p_0 V_0$, har vi her en isoterm ekspansjon fra tilstand b til en tilstand med trykk p_0 og volum $5V_0$. Arbeidet blir dermed

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_0}^{5V_0} p dV - 4p_0 V_0 = \int_{V_0}^{5V_0} \frac{5p_0 V_0}{V} dV - 4p_0 V_0 \\ &= 5p_0 V_0 \ln 5 - 4p_0 V_0 = 500 \cdot (5 \ln 5 - 4) \\ &\simeq 2.0 \cdot 10^3 = 2.0 \text{ kJ} \end{aligned}$$



e)
 I denne syklusen er T_3 maksimal og T_1 minimal temperatur. Hvis dette hadde vært en Carnotprosess mellom to varme-reservoar ved temperaturer T_3 og T_1 , ville virkningsgraden ha vært $\eta_C = 1 - T_1/T_3$. Otto-syklusen kan ikke ha så stor virkningsgrad, slik at $\eta_O < \eta_C$. ($\eta_O = 1 - T_4/T_3$.)

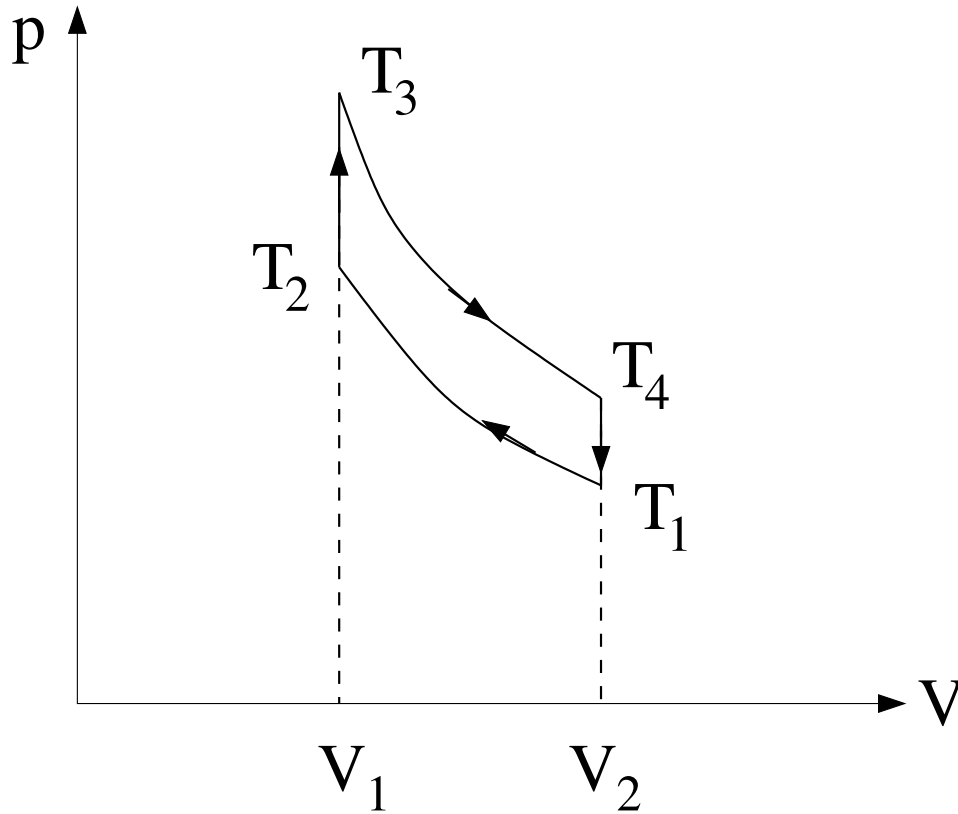
A) $\eta_O < 1 - T_1/T_3$

f)
 $\Delta U = 0$ for hel syklus, slik at

$$W = Q_{23} + Q_{41} = C_V(T_3 - T_2) + C_V(T_1 - T_4) = C_V(T_1 - T_2 + T_3 - T_4).$$

g) Gassen utvider seg, så omdanning av varme til arbeid er ikke det eneste som skjer. Derfor er prosessen ikke i strid med 2. lov. B).

Oppgave 4



For å bestemme virkningsgraden trenger vi uttrykk for tilført varme Q_1 ved lav-volum-isokoren V_1 og avgitt varme Q_2 ved høy-volum-isokoren $V_2 = \kappa V_1$. Siden prosessene er isokore, dvs konstant volum, blir de to varmemengdene

$$Q_1 = C_V(T_3 - T_2)$$

og

$$Q_2 = C_V(T_1 - T_4).$$

Her er T_3 og T_2 hhv høy og lav temperatur for isokoren med volum V_1 , mens T_4 og T_1 er høy og lav temperatur for isokoren med volum V_2 . Adiabatligningen $TV^{\gamma-1} = \text{konstant}$ knytter temperaturene sammen:

$$T_1(\kappa V_1)^{\gamma-1} = T_2 V_1^{\gamma-1}$$

og

$$T_4(\kappa V_1)^{\gamma-1} = T_3 V_1^{\gamma-1}.$$

Virkningsgraden er

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_3 - T_2 + T_1 - T_4}{T_3 - T_2}.$$

Her kan (f.eks) T_2 og T_3 elimineres via adiabatligningene ovenfor, og vi finner

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(T_4 - T_1)(\kappa^{\gamma-1} - 1)}{(T_4 - T_1)\kappa^{\gamma-1}} \\ &= 1 - \kappa^{1-\gamma}. \end{aligned}$$