

Oppgave 1. Adiabatisk demagnetisering

a) Med gass, og arbeid $p dv$, har vi $df = du - T d\sigma - \sigma dT = -p dv - \sigma dT$, som betyr at $\sigma = -(\partial f / \partial T)_p = +k \partial(T \ln z) / \partial T$. Konstant p i gass-systemet er analogt til konstant magnetfelt h i et magnetisk system, men temperaturen T opptrer på samme vis uansett type system, så uttrykket for entropien σ blir det samme.

b) Den deriverte av $\cosh x$ er $\sinh x$, og $\tanh x = \sinh x / \cosh x$. Dermed:

$$\begin{aligned}\sigma &= k \frac{\partial}{\partial T} [T \ln (2 \cosh \beta h)] \\ &= k \left[\ln 2 + \ln \cosh \beta h + T \frac{1}{2 \cosh \beta h} \cdot 2 \sinh \beta h \cdot (-h/kT^2) \right] \\ &= k [\ln 2 + \ln \cosh \beta h - \beta h \tanh \beta h].\end{aligned}$$

Dvs, en funksjon av produktet βh , som antydnet i oppgaveteksten. Hvis vi nå spør "hva er σ som funksjon av m og T ?" (analogt til $\sigma(V, T)$ i gass-system), innser vi at σ blir en funksjon av kun m , dvs uavhengig av T , siden $m = m(\beta h)$. For å bestemme funksjonen $\sigma(m)$ må vi invertere $m(\beta h)$, dvs bestemme funksjonen $y(m)$, med $y \equiv \beta h$. Vi har $\tanh x = (z - 1/z)/(z + 1/z) = (z^2 - 1)/(z^2 + 1)$, der vi har innført $z = e^x$. Dermed:

$$\begin{aligned}m &= \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \\ (z^2 + 1)m &= z^2 - 1 \\ z^2 &= \frac{1 + m}{1 - m} \\ x &= \beta h = \ln \sqrt{\frac{1 + m}{1 - m}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + m}{1 - m}.\end{aligned}$$

Vi trenger også $\cosh x$ uttrykt ved m :

$$\begin{aligned}m &= \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} \\ \Rightarrow m^2 \cosh^2 x &= \cosh^2 x - 1 \\ \Rightarrow \cosh x &= \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}}.\end{aligned}$$

Dermed:

$$\begin{aligned}\sigma &= k \left[\ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + m) - \frac{1}{2} \ln(1 - m) - \frac{1}{2} m \ln(1 + m) + \frac{1}{2} m \ln(1 - m) \right] \\ &= k \left[\ln 2 - \frac{1}{2} (1 + m) \ln(1 + m) - \frac{1}{2} (1 - m) \ln(1 - m) \right],\end{aligned}$$

som vi skulle vise.

c) Antall mikrotilstander W i et system med i alt N spinn og et antall N_+ spinn som peker med magnetfeltet og et antall N_- spinn som peker mot magnetfeltet, må være bestemt ved hvor mange ulike måter vi kan "trekke" N_+ med spinn "opp" og N_- med spinn "ned", dvs

$$W = \frac{N!}{N_+! N_-!}.$$

Og vi har sammenhengene $N = N_+ + N_-$ og $Nm = N_+ - N_-$, som gir

$$N_+ = \frac{1}{2}(1+m)N \quad \text{og} \quad N_- = \frac{1}{2}(1-m)N.$$

Med Boltzmanns prinsipp blir entropien følgelig

$$\begin{aligned} S &= k \ln W = k(\ln N! - \ln N_+! - \ln N_-!) \\ &= k(N \ln N - N - (N_+ \ln N_+ - N_+) - (N_- \ln N_- - N_-)) \\ &= k(-N_+ \ln \frac{N_+}{N} - N_- \ln \frac{N_-}{N}) \\ &= kN(-\frac{1}{2}(1+m) \ln((1+m)/2) - \frac{1}{2}(1-m) \ln((1-m)/2)) \\ &= Nk \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right], \end{aligned}$$

dvs det samme som funnet i punkt b.

[Spesialtilfeller: Hvis T er forskjellig fra null, vil $h = 0$ gi $m = 0$, som er rimelig: Like stor sjanse for spinn opp og spinn ned, og i middel null magnetisk moment pr spinn. Uttrykket for σ gir $\sigma(0) = k \ln 2$, som er rimelig: Med $h = 0$ er det $W = 2$ like sannsynlige mikrotilstander pr spinn. Den andre ytterlighet er at $\beta h \gg 1$ (evt $\beta h \ll -1$), dvs magnetfeltet er så sterkt at alle spinn foretrekker å ligge i samme retning som det påtrykte feltet. Da blir $m = \tanh \beta h \simeq 1$ (evt $m \simeq -1$ hvis $h < 0$), og entropien blir $\sigma(1) = k(\ln 2 - (1/2) \cdot 2 \ln 2 - (1/2) \cdot 0) = 0$. (Det siste leddet i parentesene blir null fordi x går raskere mot null enn $\ln x$ går mot minus uendelig når x går mot null.) Igjen et rimelig resultat: Med alle spinn i samme retning er det kun $W = 1$ mikrotilstand som er mulig.]

d) Når magnetfeltet h skrues på isotermt, vil magnetiseringen $m = \tanh \beta h$ øke. Når så magnetfeltet slås av igjen, uten termisk kobling til omgivelsene, vil systemets entropi ikke endre seg, ettersom σ bare avhenger av m . Uendret magnetisering, $m_1 = m_2$ betyr $\tanh \beta_1 h_1 = \tanh \beta_2 h_2$, og dermed $\beta_1 h_1 = \beta_2 h_2$, eller

$$T_1 = T_2 h_1 / h_2 < T_2.$$

For en ideell paramagnet (dvs ingen vekselvirkning mellom nabospinn) vil $T_1 \rightarrow 0$ når $h_1 \rightarrow 0$. I praksis vil det være en viss vekselvirkning mellom nabospinn, slik at et gitt spinn vil erfare et magnetfelt $B \neq 0$ selv om det ytre feltet skrues helt av.