NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I FY1005 og TFY4165 TERMISK FYSIKK: LØSNINGSFORSLAG

Mandag 2. juni 2014 kl. 0900 - 1300

Oppgave 1. Ti flervalgsoppgaver. (Poeng: 2.5×10=25)

a. A. Van der Waals tilstandsligning kan brukes til å beskrive koeksistens mellom *to* faser av et gitt stoff, men ikke *tre*.

b. B. Den sykliske regel og de ulike definisjonene gir $\alpha_V/\kappa_T = p\alpha_p$. Dermed er $\alpha_p = \alpha_V/p\kappa_T = 2.6 \cdot 10^{-4}/(1.013 \cdot 10^5 \cdot 4.6 \cdot 10^{-10}) = 5.58 \simeq 5.6$.

c. C. Se notater om kinetisk gassteori.

d. D. 2. hovedsetning er ikke en konsekvens av 1. hovedsetning. (Det er mulig å overføre varme fra et kaldt legeme til et varmere legeme. Eksempel: Kjøleskap. Alternativ B er Kelvins formulering av 2. hovedsetning. Det er ingenting i veien for å omdanne arbeid i sin helhet til varme.)

e. D. Entropi er en tilstandsfunksjon. Det betyr at S_A og S_B er entydig definert, og $S_1 = S_2 = S_B - S_A$.

f. B. $\partial p/\partial T = Nk/V$ for ideell gass, slik at $\Delta S = \int_3^{15}(Nk/V)\,dV = Nk\ln 5 = nR\ln 5 = 1 \cdot 8.314 \cdot \ln 5 \simeq 13.4\,\mathrm{J/K}$.

g. C. Kretsprosessen forløper *mot* klokka. Da er arbeid utført av systemet negativt, og systemet avgir netto positiv varme til omgivelsene.

h. C. Fra gitte opplysninger har vi at $U = \alpha V T^4$ og $p = \beta U/V = \gamma T^4$, med konstanter α, β og γ (dvs uavhengige av V og T). Følgelig er $p(V,T) = p(T)$, uavhengig av V, slik at isotermen må bli en horisontal kurve ($p = \gamma T^4 =$ konstant).

i. C. For ideell atomær gass er indre energi $U_a = 3NkT/2 = 3p_aV/2$. For fotongassen er indre energi $U_s = 4\sigma V T^4/c$ (se formelvedlegg). Dermed er $U_a = U_s$ dersom $T = (3cp_a/8\sigma)^{1/4} = (3 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6}/8 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8})^{1/4} = 211$ K.

j. B. Energiforskjellen mellom laveste og nest laveste rotasjonstilstand er $\Delta E = \hbar^2/I_0$, med treghetsmomentet $I_0 = 2 \cdot 14 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot (0.05 \cdot 10^{-9})^2 = 1.17 \cdot 10^{-46}$ kg m^2. Dvs, $\Delta E = 9.43 \cdot 10^{-23}$ J. Ved romtemperatur er $kT = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 414 \cdot 10^{-23}$ J. Sannsynlighetsforholdet blir dermed $\pi_1/\pi_0 = \exp(-\Delta E/kT) = \exp(-9.43/414) = 0.98 \simeq 1.0$.

Oppgave 2. Fjernvarmeanlegg. (Poeng: 6+6+6+7=25)

a. Anlegget leverer $5 \cdot 10^6$ J pr sekund ved full utnyttelse. For å heve temperaturen i 1 m^3 vann med 30 K kreves varmeenergien $Q = 4.2 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 30\,\text{J} = 1.26 \cdot 10^8$ J. Det betyr at $5 \cdot 10^6/1.26 \cdot 10^8 = 0.0397$ m^3, eller ca 40 L vann kan passere gjennom anlegget pr sekund. Dette tilsvarer en strømningshastighet

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{dV/A}{dt} = \frac{dV/dt}{\pi R_2^2} = \frac{0.0397}{\pi \cdot 0.134^2}\ \text{m/s} = 0.70\ \text{m/s}$$

b. Vi har stasjonær varmeledning med sylindersymmetri. Da må en konstant varme strømme pr tidsenhet gjennom en sylinderflate med radius r ($R_2 < r < R_1$) og lengde L, dvs areal $A = 2\pi r L$:

$$\begin{aligned} \frac{đQ/dt}{2\pi r L} &= -\kappa \frac{dT}{dr} \\ \Rightarrow \frac{đQ/dt}{L} \int_{R_2}^{R_1} \frac{dr}{r} &= -2\pi\kappa \int_{T(z)}^{T_0} dT \\ \Rightarrow \frac{đQ/dt}{L} &= \frac{2\pi\kappa}{\ln(R_1/R_2)}\,[T(z) - T_0]. \end{aligned}$$

Med andre ord, $\alpha = 2\pi\kappa/\ln(R_1/R_2)$. (Tallverdi i SI-enheter: $2\pi\kappa = 0.1696$ W/m K.)

c. Varmekapasiteten pr volumenhet er

$$c = C/V = C/AL = C/\pi R_2^2 L.$$

Dermed:

$$(đQ/dt)/L = -(C dT/dt)/L = -(C/L)(dT/dz)(dz/dt),$$

som med $v = dz/dt$ og $C/L = c\pi R_2^2$ gir

$$(đQ/dt)/L = -cv\pi R_2^2 \frac{dT}{dz}.$$

Med andre ord, $\gamma = cv\pi R_2^2$. (Tallverdi i SI-enheter: $\gamma = (5/3) \cdot 10^5$ W/K.)

d. Vi har nå to uttrykk for varmetapet pr tids- og lengdeenhet, og disse kan settes lik hverandre. Dette gir differensialligningen

$$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{\alpha}{\gamma}\, dz,$$

med

$$\alpha/\gamma = \frac{2\kappa}{cR_2^2 v \ln(R_1/R_2)}.$$

Innsetting av oppgitte tallverdier gir (som oppgitt)

$$\gamma/\alpha \simeq 982 \ln(R_1/R_2),$$

i enheten kilometer. Integrasjon av differensialligningen, på venstre side fra $T = T(0)$ til $T = T(z)$ og på høyre side fra 0 til z, gir

$$\ln \frac{T(z) - T_0}{T(0) - T_0} = -\alpha z/\gamma.$$

Med $z = 8$ km, $T(8) - T_0 = 98$ K og $T(0) - T_0 = 100$ K har vi

$$(\alpha/\gamma) \cdot 8 = \ln(100/98) = 0.0202,$$

og dermed

$$982 \ln(R_1/R_2) = 8/0.0202 \simeq 396,$$

dvs

$$R_1 = R_2 \exp(396/982) = 13.4 \cdot 1.50 = 20.1\,\text{cm}.$$

Minste isolasjonstykkelse blir dermed

$$d = R_1 - R_2 = 20.1 - 13.4 = 6.7\,\text{cm}.$$

Oppgave 3. Ideell paramagnet. (Poeng: 7+6+7=20)

a. Partisjonsfunksjonen er

$$z = \sum_j e^{-E_j/kT} \to \sum_{s=\pm 1} e^{-sx} = e^{-x} + e^{x} = 2\cosh x.$$

Sannsynlighetsfordelingen $p(s)$ må være normert, slik at

$$1 = p(1) + p(-1) = C\left(e^{-x} + e^{x}\right) = 2C\cosh x.$$

Dette fastlegger normeringskonstanten: $C = 1/(2\cosh x)$. Vi ser at $C = 1/z$. Elektronets midlere energi blir

$$u = \sum_s E(s)p(s) = \frac{-\mu_B B e^{x} + \mu_B B e^{-x}}{2\cosh x} = -\mu_B B \tanh x.$$

For lave temperaturer er $x \gg 1$ og $\tanh x \simeq 1$, slik at $u \simeq -\mu_B B$. Dette er rimelig: Elektronet er med stor sannsynlighet i laveste energitilstand, med spinn i samme retning som det ytre magnetfeltet, og energi $u \simeq E_- = -\mu_B B$.

b. Elektronets midlere magnetiske moment:

$$m = \sum_s (-s)p(s) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2\cosh x} = \tanh x.$$

For høye temperaturer er $x \ll 1$ og $\tanh x \simeq x = \mu_B B/kT$, slik at $m \simeq \mu_B B/kT \sim 1/T$, i samsvar med Curies lov.

c. Med sterkt magnetfelt er $x \gg 1$ og $\tanh x \simeq 1$, dvs $m \simeq 1$. (Eventuelt $m \simeq -1$ dersom magnetfeltet peker motsatt vei.) I grensen $m \to 1$ vil entropileddet proporsjonalt med $(1-m)\ln(1-m)$ forsvinne, slik at

$$\sigma \simeq k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+1)\ln(1+1)\right] = 0.$$

Dette er som forventet i lys av Boltzmanns entropidefinisjon $S = k \ln W$: Med alle spinn i samme retning er det kun $W = 1$ mikrotilstand som er mulig.
Null ytre magnetfelt, $B = 0$, gir $x = 0$, $\tanh x = 0$ og $m = 0$. De to mulige spinntilstandene har like stor energi ($E = 0$), det er like stor sjanse for spinn opp og spinn ned, og det blir i middel null magnetisk moment pr spinn. Uttrykket for σ gir $\sigma(0) = k \ln 2$, som er rimelig: Med $B = 0$ er det $W = 2$ like sannsynlige mikrotilstander pr spinn.

Oppgave 4. **Maxwells hastighetsfordeling. (Poeng: 6+6+8=20)**

a. Med uavhengige hastighetskomponenter har vi ganske enkelt

$$F(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) = \frac{B}{\pi} e^{-Bv^2},$$

der $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.
Analogt det vi gjorde i forelesningene (for tredimensjonal hastighetsfordeling) har vi nå, i to dimensjoner:

$$f(v)dv = \int_{\phi=0}^{2\pi} F(v)dv\, v\, d\phi = 2\pi v F(v)dv,$$

dvs

$$f(v) = 2\pi v F(v) = 2Bve^{-Bv^2}.$$

b. Midlere kvadratiske hastighet er

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle.$$

For hver av de to komponentene:

$$\begin{aligned}
\langle v_x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x \\
&= \sqrt{\frac{B}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-Bv_x^2} dv_x \\
&= \sqrt{\frac{B}{\pi}} \cdot \left(-\frac{d}{dB} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \right) \\
&= \sqrt{\frac{B}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2B^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2B}
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\langle v^2 \rangle = 1/2B + 1/2B = 1/B.$$

c. For hver plastskive har vi 200 sammenhørende målinger av tid og posisjon. Dette gir grunnlag for numerisk bestemmelse av 199 hastighetsverdier, og en naturlig måte å beregne hastighetene på er (f.eks)

$$\begin{aligned}
v_x(j+1) &= \frac{x(j+1) - x(j)}{t(j+1) - t(j)} \\
v_y(j+1) &= \frac{y(j+1) - y(j)}{t(j+1) - t(j)} \\
v(j+1) &= \sqrt{v_x(j+1)^2 + v_y(j+1)^2}
\end{aligned}$$

for $j = 1 \ldots 199$. Deretter kan intervallene $(v_x^{\min}, v_x^{\max})$ og tilsvarende for v_y og v deles inn i et passende antall sub-intervaller, og antall målte hastighetsverdier innenfor hvert sub-intervall telles opp og framstilles i et histogram. Til slutt kan histogramfordelingen sammenlignes med Maxwellfordelingen.