

16.04.13

I(T), frekvensfordelingen

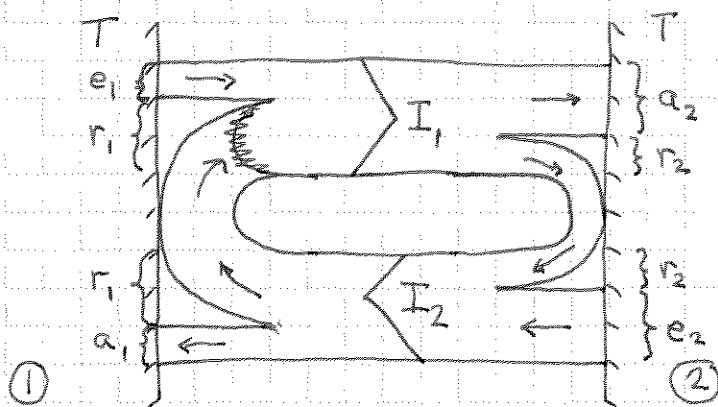
(117)

Siden $u(T) = AT^4 = \int_0^{\infty} df \eta(f, T)$ med $\eta = \langle E \rangle \cdot 8\pi f^2 / c^3$,

og $I(T) = \frac{c}{4} \cdot u(T) = \int_0^{\infty} df \gamma(f, T)$; $\gamma = dI/df$,

følger det at $\gamma(f, T) = \frac{c}{4} \eta(f, T) = \langle E \rangle \cdot 2\pi f^2 / c^2$.

Med $\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{\beta hf} - 1}$ blir $\gamma = \frac{2\pi}{c^2} \frac{hf^3}{e^{\beta hf} - 1}$

Stråling fra ikke perfekt svarte legemer

Antar $t_1 = t_2 = 0$, dvs ingen transmisjon.

Da er $r_1 + a_1 = 1$

og $r_2 + a_2 = 1$

(se s. 106)

Hvis termisk likevekt: $I_1 = I_2$

Da må vi ha: $a_1 + r_1 = r_1 + e_1$ og $a_2 + r_2 = r_2 + e_2$

dvs $e_1 = a_1$ og $e_2 = a_2$

Her er: $a(f)$ = absorpsjonseverne

$e(f)$ = emisjonseverne

$r(f)$ = refleksjonseverne

Utstrålt intensitet fra legeme med emisjonseverne $e(f)$:

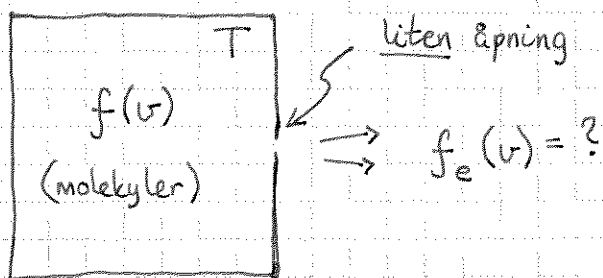
$$I(T) = \int_0^{\infty} df e(f) \gamma(f, T)$$

Svart legeme: $a = e = 1$ (for alle frekvenser f)

9.7 Effusjon

(118)

= utstrømning



Hvis åpningens tverrsnitt er liten i forhold til avstanden mellom partikkelkollisjoner, skal vi se at $f_e(v)$ er forskjøvet mot raskere molekyler, i forhold til $f(v)$.

Fra sist (s. 115, 116):

$$j = \int dj = \int_0^\infty \frac{n}{4} v f(v) dv = \frac{n}{4} \langle v \rangle = \text{antall partikler ut av åpningen pr flate- og tidsenhet}$$

$$dj = \frac{n}{4} v f(v) dv = \text{antall partikler ut av åpningen pr flate- og tidsenhet, og med fart mellom } v \text{ og } v+dv$$

$$\Rightarrow \frac{dj}{j} = \frac{v}{\langle v \rangle} f(v) dv = f_e(v) dv = \text{sannsynligheten for at en effunderende partikkel har fart i } (v, v+dv)$$

Inne i boksen (Maxwellfordeling):

$$\left. \begin{aligned} f(v) &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \\ \langle v \rangle &= \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \end{aligned} \right\} \text{ 9.4, 9.5}$$

$$\Rightarrow f_e(v) = \frac{v}{\langle v \rangle} f(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 v^3 e^{-mv^2/2kT}$$

Midlere energi pr effunderende partikkel:

(119)

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle_e = \frac{1}{2} m \int_0^{\infty} v^2 f_e(v) dv = \frac{1}{2} m \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 \int_0^{\infty} v^5 e^{-mv^2/2kT} dv$$

$$z = mv^2/2kT, \quad dz = \frac{m}{kT} v dv, \quad v^5 dv = v^4 v dv = z^2 \left(\frac{2kT}{m} \right)^2 \frac{kT}{m} dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle_e = kT \cdot \int_0^{\infty} z^2 e^{-z} dz = 2kT$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle v^2 \rangle_e = 4kT/m$$

Drs: Raske partikler kommer seg raskest ut.

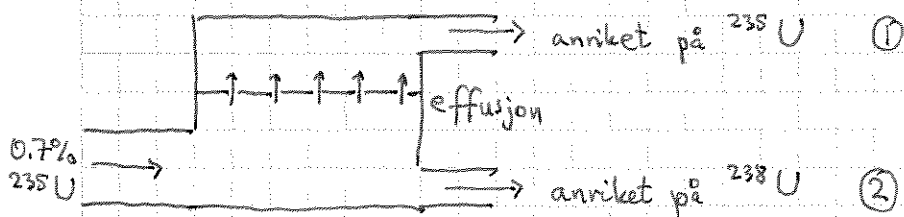
Hvis vi har en gassblanding med ulike molekylmasser:

$$\frac{j_1}{j_2} = \frac{n_1 \langle v_1 \rangle}{n_2 \langle v_2 \rangle} = \frac{n_1}{n_2} \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}$$

drs: strålen som kommer ut av den lille åpningen er annriket på lette partikler

Eks: Separasjon av ^{235}U og ^{238}U .

Braker UF_6 (gass), med kun ^{19}F . Naturlig uran: 0.7% ^{235}U



$$\textcircled{1}: \frac{j(^{235}\text{U } ^{19}\text{F}_6)}{j(^{238}\text{U } ^{19}\text{F}_6)} = \frac{0.7}{99.3} \cdot \frac{\sqrt{352}}{\sqrt{349}} = \frac{0.7}{99.3} \cdot 1.004$$

10. Varmeledning og diffusjon [LHL 18,14; YF 17]

(120)

Innledende bemerkninger:

Fenomen

Varmeledning

Diffusjon

Elektrisk ledningsevne

Viskositet

Transport av

Kinetisk energi (varme)

Partikler (masse)

Ladning

Impuls

Transport skyldes gradienter. Eks: $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla V$,
Ohms lov (σ = elektrisk ledningsevne).

En avgjørende faktor er: Hvor ofte og hvordan kolliderer
partiklene?

For en forståelse på mikronivå er midlere fri veilengde λ
en sentral størrelse. ("Mean Free Path")

Transportegenskaper kan beskrives fenomenologisk, med
empiriske transportkoeffisienter.

Alternativt på mikroskopisk nivå, med transp.koeff.
beregnet med (f.eks.) kinetisk gasteori.

Vi gjør det fenomenologisk først. (10.3, 10.6, 10.8, 10.4)

Deretter på mikronivå. (10.1, 10.5, 10.7)

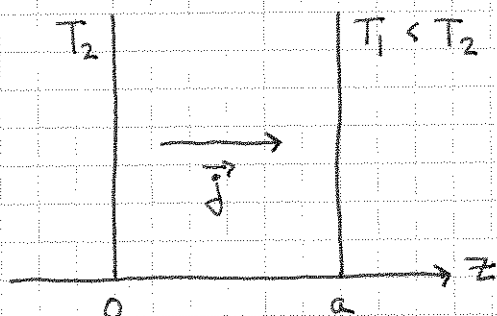
18.04.13

10.3 Fourniers lov, Varmeledning ligningen

[LHL 18.1, 18.5]
[YF 17.7]

(121)

Ser på to (store) parallelle plan med et homogent stoff mellom:



$\vec{j} = j_z \hat{z}$ = overført varme
pr flate- og tidsenhet,
varmestromtetthet $[W/m^2]$

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

Anta stasjonære forhold ("steady state"; tidsuavhengig).

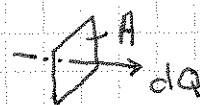
Erfaringsmessig er da varmestromtettheten prop. med temperaturfallet pr lengdeenhet:

$$j_z = -\kappa \frac{\Delta T}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{linear respons})$$

κ = varmeledningseinen til stoffet mellom planene $[W/m \cdot K]$

Varme som passerer areal A på tid dt :

$$dQ = j_z \cdot A \cdot dt = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \cdot A \cdot dt$$



$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial z}}$$

Generalisering: $j_z \rightarrow \vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow \nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

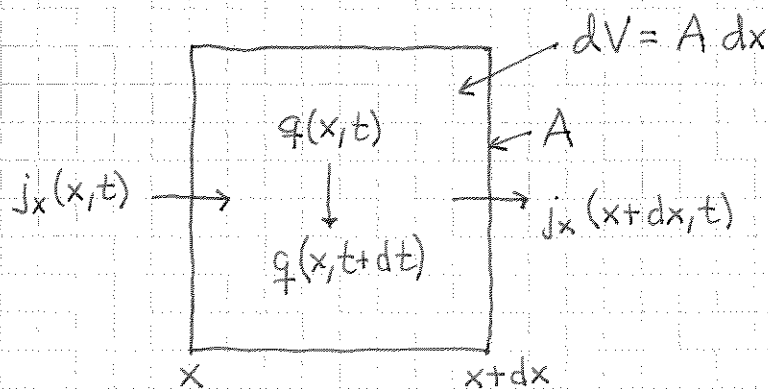
Fourniers lov

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = -\kappa \nabla T}$$

Mer generelt avhenger T også av tiden t :

$$T = T(\vec{r}, t).$$

Energibevarelse kombinert med Fourniers lov gir ligningen som bestemmer $T(\vec{r}, t)$.



q = energi pr volumenhett

$Q = q \cdot dV$ = energi i volumet dV

Endring i energien i tidsrom dt :

$$\begin{aligned} dQ &= Q(x, t+dt) - Q(x, t) \\ &= [q(x, t+dt) - q(x, t)] dV \\ &= \frac{\partial q}{\partial t} dt A dx \end{aligned}$$

Dette skyldes tilført energi:

$$\begin{aligned} dQ &= [j_x(x, t) - j_x(x+dx, t)] A dt \\ &= - \frac{\partial j_x}{\partial x} dx A dt \end{aligned}$$

Dermed: $\frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}$

Generalisering: $\frac{\partial j_x}{\partial x} \rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$$

Kontinuitetsligningen (her for bevaring av energi)

$$dq = \frac{dq}{dT} \cdot dT = \frac{1}{V} \frac{dQ}{dT} \cdot dT = \frac{C}{V} \cdot dT = c \cdot dT \quad (123)$$

der $c = C/V = \text{varmekapasitet pr volumenet}$

$$\Rightarrow \frac{\partial q}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

Hvis κ er konstant (uniformt medium): $\nabla \cdot \vec{j} = -\kappa \nabla^2 T$

$$\nabla^2 = \text{"div grad"} = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Laplace-operator})$$

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T}$$

Varmeledningsslikningen
(Heat equation)

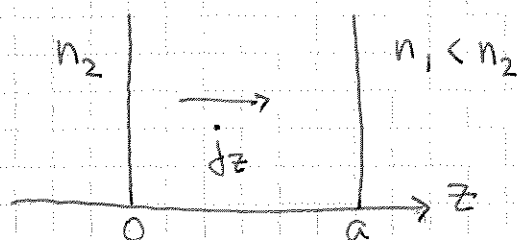
$$D_T = \kappa/c = \text{termisk diffusivitet, enhet } m^2/s$$

10.6 (10.8) Ficks lov. Diffusjonslikningen [LHL 18.5]

Vi ser her ikke på partikkeltransport som skyldes trykkforskjeller ($\nabla p \neq 0$), dvs strømming / vind.

Dvs: Vi antar at p er konstant, dvs at total partikkel tetthet er konstant, men at tettheten $n(\vec{r}, t)$ for en gitt type partikler varierer.

Det fenomenologiske blir da helt analogt det vi gjorde med varmeledning i 10.3, med $T(\vec{r}, t)$ erstattet av partikkel tettheten $n(\vec{r}, t)$.



Antar også her først
stasjonære forhold.

$$\Delta n = n_1 - n_2$$

Erfaringsmessig er partikkelstrømtettheten j_z prop. med
tetthetsreduksjonen pr lengdeenhet:

$$j_z = -D \frac{\Delta n}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} -D \frac{\partial n}{\partial z}$$

D = diffusjonskonstanten

Enheter: $[j] = \frac{1}{m^2 s}$, $[n] = \frac{1}{m^3}$, $[D] = \frac{m^2}{s}$

Generelt: $\boxed{\vec{j} = -D \nabla n}$ Ficks lov

Sammen med kravet om partikkelbevarelse,

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$$

dvs kontinuitetslign. for antall
partikler,

gir dette

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n}$$

Diffusjonslikningen,
med $D = \text{konstant}$

[Evt. $\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla n)$ mer generelt]

Skalering

(125)

Eks 1: Potetkoking, t = koketid

V_1

V_2

$$\frac{t_2}{t_1} = ?$$

Eks 2: Frost i bakken, t = "frysetid"

Høst: $T_0 > 0^\circ\text{C}$
 T_0



Vinter: $T \ll T_0$
 d_1
 d_2
 t_1
 t_2

$$\frac{t_2}{t_1} = ?$$

$T(\vec{r}, t)$ er bestemt av $\partial T / \partial t = D_T \nabla^2 T$. Hvis $\vec{r} = (x, y, z)$ erstattes av $\vec{R} = a\vec{r} = (ax, ay, az)$, må ∇^2 erstattes av $\nabla_R^2 = a^{-2} \nabla^2$. Da må samtidig t erstattes av $\tau = a^2 t$ for å gi uendret ligning:

$$\frac{\partial T}{\partial (a^2 t)} = D_T \frac{\nabla^2}{a^2} T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \tau} = D_T \nabla_R^2 T$$

Dvs:

Skalering av alle lengder i problemet med faktor a og tid med faktor a^2 gir uendret ligning.

Dvs: Hvis en viss T oppnås i avstand r etter tid t , oppnås samme T i avstand $R = ar$ etter tid $\tau = a^2 t$.

$$R \sim a, \tau \sim a^2 \Rightarrow R \sim \sqrt{\tau}.$$

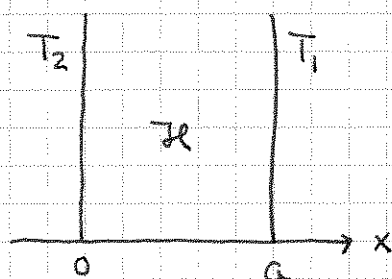
Må også gjelde for diffusjon, da ligningen er den samme.

10.4 Eksempler, varmeledning

(126)

Først: stationære forhold, $\dot{T} = 0 \Rightarrow \nabla^2 T = 0$
(Laplace-lign, jf. $\nabla^2 V = 0$ i elektrostatikken når $\rho = 0$)

Eks 1: Plan-symmetri [LHL 18.1]



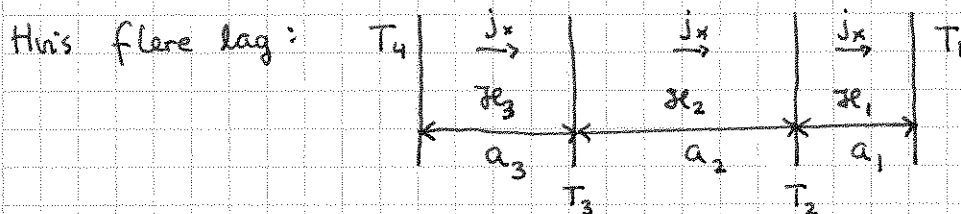
$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow T(x) = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{a} x$$

$$[T(0) = T_2, T(a) = T_1, \text{ ok}]$$

$$\Rightarrow j_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{T_2 - T_1}{a} = K \cdot \Delta T$$

$$K = \kappa/a = \text{varmegjennomgangstallet}$$



Stationært $\Rightarrow$ samme j_x overalt [ellers ville T endre seg]

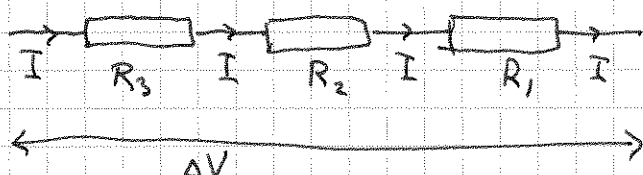
$$\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{1}{K_1} j_x$$

$$(+)\ T_3 - T_2 = \frac{1}{K_2} j_x$$

$$(+)\ T_4 - T_3 = \frac{1}{K_3} j_x$$

$$\Rightarrow \Delta T = T_4 - T_1 = \frac{1}{K} j_x \quad \text{med} \quad \frac{1}{K} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{K_i}$$

Analogt med seriekobling av resistanser:



$$\Delta V = RI, \quad R = \sum_{i=1}^3 R_i$$

(Ohms lov)

Fouriers lov: $\Delta T = \frac{1}{K} j_x$, $\frac{1}{K} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{K_i}$

(127)

$\Rightarrow$ Analogien er: $\Delta T \Leftrightarrow \Delta V$

$$\frac{1}{K} \Leftrightarrow R \quad \left(\frac{a_i}{\lambda_i} \Leftrightarrow R_i \right)$$

$$j_x \Leftrightarrow I$$

Anvendelse med tallverdier:

Lagdelt vegg i hus, 3 cm gran + 20 cm steinull + 3 cm gran,

$$\lambda_{\text{gran}} = 0.14, \quad \lambda_{\text{steinull}} = 0.047, \quad T_4 = T_{\text{inne}} = 20^\circ\text{C}, \quad T_1 = T_{\text{ute}} = -10^\circ\text{C}.$$

Regn ut j_x i W/m^2 og $T(x)$.

Andre λ -verdier, for sammenligning:

$$\lambda_{\text{luft}} = 0.024, \quad \lambda_{\text{stål}} = 43, \quad \lambda_{\text{xenon}} = 0.0051$$

Hitt

18.04.13