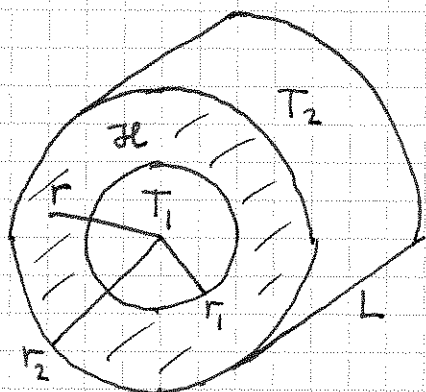




$$T = T(r), \quad r_1 < r < r_2$$

$$T(r_1) = T_1$$

$$T(r_2) = T_2$$

$$\nabla T = \hat{r} \, dT/dr$$

$$\nabla^2 T = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} T$$

$$\text{Stasjonært} \Rightarrow \nabla^2 T = 0 \Rightarrow r \frac{d}{dr} T = \alpha \quad (\alpha = \text{konst.})$$

$$\Rightarrow dT = \alpha \, dr/r \Rightarrow \underline{T = \alpha \ln r + \beta} \quad (\beta = \text{konst.})$$

Grensebetingelsene fastlegger α og β :

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \alpha \ln r_1 + \beta \\ T_2 = \alpha \ln r_2 + \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)}}, \quad \underline{\beta = \frac{T_1 \ln r_2 - T_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}}$$

Varmestrøm pr lengdeenhet:

$$\dot{Q} = -k A \frac{dT}{dr} = -k \cdot 2\pi r \cdot L \frac{dT}{dr} = -2\pi k L \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{\dot{Q}}{L} = 2\pi k \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)}}$$

Anvendelse: Fjernvarmeanlegg. Vann med temp. T_1 ($z=0$) sendes fra anlegget til forbrukere i avstand L . Hvor fort, u , må vannet strømme for at T_1 ($z=L$) ikke skal bli for lav? Anta jevn temp. T_1 i vannet ved gitt sted z .

$$\text{Løsning: } \Delta T(z) = T_1(z) - T_2 = \Delta T(0) \exp \left\{ - \frac{2kz}{u \cdot (Q/V) \cdot r_1^2 \cdot \ln(r_2/r_1)} \right\}$$

med $Q/V = \text{vannets varmekap. pr volumenhet} = 4.2 \cdot 10^6 \, \text{J/m}^3 \cdot \text{K}$

Prøv f.eks. $r_1 = 15 \text{ cm}$, $r_2 = 20 \text{ cm}$, $k = 0.035 \, \text{W/m} \cdot \text{K}$ (isopor), $T_2 = 0^\circ \text{C}$, $T_1(0) = 80^\circ \text{C}$, $L = 10 \text{ km}$, og $\{T_1(L)\}_{\min} = 75^\circ \text{C}$.

Eks. 3: Kulesymmetri

(129)

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rT) = 0 \quad (\text{stasjonært})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} (rT) = \beta \Rightarrow rT = \alpha + \beta r \Rightarrow \underline{T(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta}$$

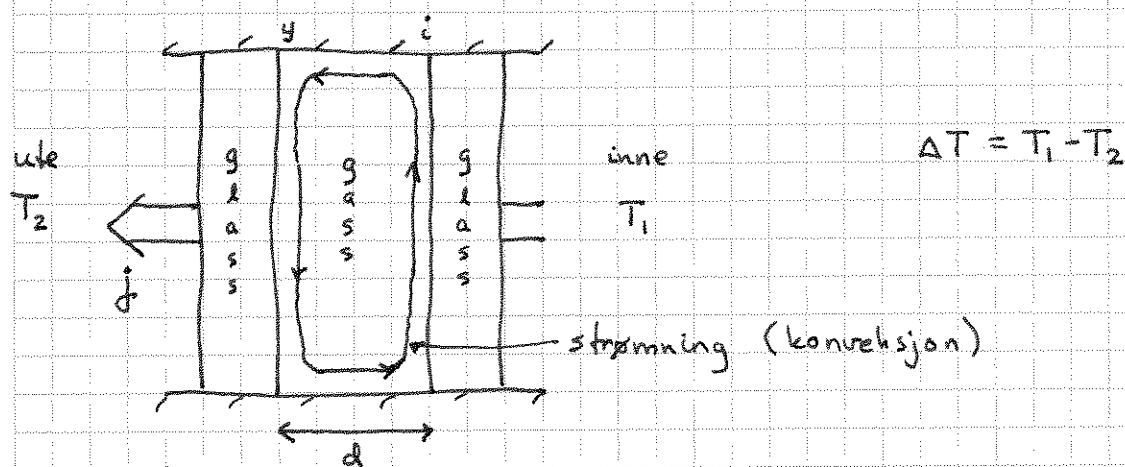
[hvoretter grensebetingelser (2) fastlegger α og β]

$$\text{Varmestrøm: } \dot{Q} = -\kappa A \nabla T = -\kappa \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \quad (\cdot \hat{r})$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}}{4\pi \kappa r^2} = -\frac{\alpha}{r^2} \Rightarrow \underline{\dot{Q} = 4\pi \kappa \alpha}$$

Eks. 4: Vinduer, U-verdi

[LHL 18.4]



Bidrag til total varmestrøm j : $j = j_{\kappa} + j_{\sigma} + j_K$

- Varmedledning (Termisk diffusjon): $j_{\kappa} = K \cdot \Delta T \sim \Delta T$

- Stråling: $j_{\sigma} = \beta_e \sigma (T_1^4 - T_2^4) \sim \Delta T$

[$\beta_e < 1$, glasset er ikke svart legeme;

$$T_1^4 - T_2^4 = (T_1 - T_2)(T_1 + T_2)(T_1^2 + T_2^2) \sim \Delta T]$$

- Konveksjon: Gassen mellom glassplatene varmes opp innerst (i), utvider seg, og stiger oppover. Den avkjøles ytterst (y), trekker seg sammen, og faller ned. Netto: Strømning, som i figuren.

Grønt sett: $j_K \sim \Delta T$ [Konveksjon ute: Vind!]

I byggebransjen:

130

$$j = U \cdot \Delta T$$

med

j = total varmestrømtetthet (W/m^2)

$$\Delta T = T_1 - T_2 = T_{\text{inne}} - T_{\text{ute}} \quad (\text{K})$$

$$U = \text{"U-verdien"} \quad (\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Moderne 3-lags glass med refleksjonsbelegg og argon inni:

$$U \approx 0.7 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$$

Vegg med 20 cm isolasjon (s.127): $U \approx 0.2 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$

[For veggene er $U = K$ = varmegjennomgangstallet]

Merk (igjen) analogien med Ohms lov:

$$I = G \cdot \Delta V \quad ; \quad G = \text{konduktans}$$

$$j = U \cdot \Delta T \quad ; \quad U = \text{U-verdi}$$

Lagdelt vegg eller vindu $\hat{=}$ Seriekobling av resistanser

Vegger + Vinduer + Tak + Gulv $\hat{=}$ Parallellkobling av resistanser

Flere bidrag til j for vindu $\hat{=}$ Parallellkobling av resistanser
(evt. konduktanser)

Eks. 5: Forplantning av temperatursvingninger nedover i bakken. (13)

0 $T(0,t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$ (grensebetingelse)

$\kappa, c, D_T = \kappa/c$

Døgnvariasjoner: $\omega_d = \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}}, T_1^d \sim \frac{10 \text{ K}}{2}$

Årsvariasjoner: $\omega_a = \frac{2\pi}{1 \text{ år}}, T_1^a \sim \frac{20 \text{ K}}{2}$

$z \downarrow$ $T(z,t) = ?$

κ = varmeledn. emne ($\text{W/m} \cdot \text{K}$); c = varmekap. pr volumenet ($\text{J/m}^3 \cdot \text{K}$)

$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$; prøver $T = e^{i(kz - \omega t)}$

$\Rightarrow -i\omega T = -k^2 D_T T$

$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{i\omega}{D_T}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D_T}} = (1+i)\alpha$; $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2D_T}}$

$\Rightarrow T = e^{-\alpha z} e^{i(\alpha z - \omega t)}$

$\Rightarrow$ reell løsn. som oppfyller grensebet:

$T(z,t) = T_0 + T_1 e^{-\alpha z} \cos(\alpha z - \omega t)$

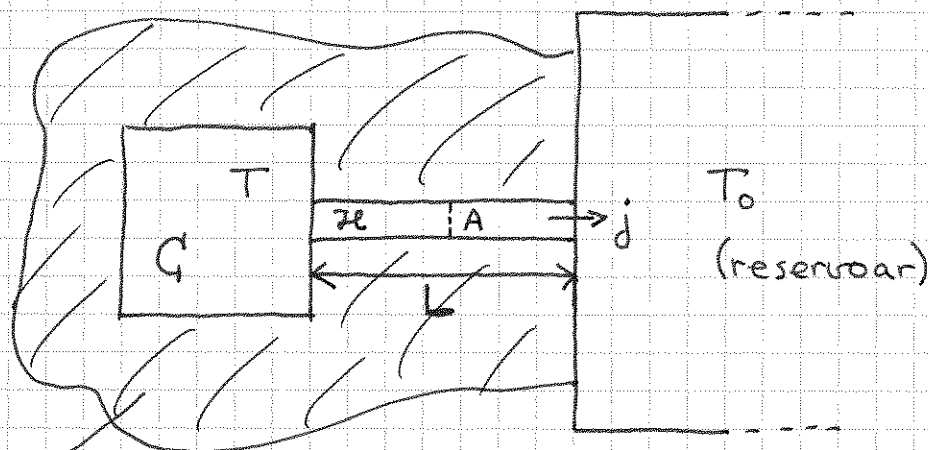
Tørr leire: $\kappa \approx 0.15$, $c \approx 1.54 \cdot 10^6 \Rightarrow D_T \approx 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

(Våt leire: $D_T \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$)

Inntrengningsdybder: $1/\alpha_d \approx 5 \text{ cm}$, $1/\alpha_a \approx 1 \text{ m}$

Forsinkelse (Faseforskjell): $\{T(0,t)\}_{\max} = T_0 + T_1$ ved $t=0$,
mens $\{T(z=\pi/\alpha, t)\}_{\max} = T_0 + T_1 e^{-\pi}$ ved $\omega t = \pi$, dvs
ved $t_a = \pi/\omega_a = \frac{1}{2} \text{ år}$ for de årlige variasjonene, dvs i
motfase ved dybden $\pi/\alpha_a \approx 3 \text{ m}$ (ert 6 m hvis våt leire).

Men amplituden er her liten: $T_1^a \cdot e^{-\pi} \approx 0.04 T_1^a \sim 0.4 \text{ K}$.



isolasjon ($k \approx 0$)

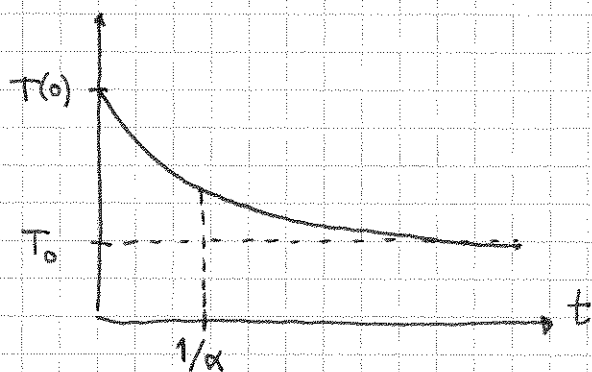
Hvordan avkjøles (evt. oppvarmes, hvis $T(0) < T_0$) det endelige systemet, med varmekap. C , via "varmelederen" med lengde L , tverrsnitt A og varmeledningsevne k ?

Løsning: $\frac{dQ}{dt} = -A \cdot j = -A \cdot k \cdot \frac{T - T_0}{L}$; $dQ = C \cdot dT$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\alpha \cdot (T - T_0) \quad ; \quad \alpha = \frac{A \cdot k}{C \cdot L}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T - T_0} = -\alpha \cdot dt \Rightarrow \ln(T - T_0) = -\alpha t + \text{konst.}$$

$$\Rightarrow T(t) = T_0 + [T(0) - T_0] e^{-\alpha t}$$



Oppgave: Finn ut omtrent hvor lang tid det tar før 27 liter isken når 0°C i isoporboks, $30 \times 30 \times 30$ cm innvendig, $40 \times 40 \times 40$ cm utvendig, $T(0) = -20^\circ\text{C}$, $T_0(\text{ute}) = +30^\circ\text{C}$.

(Mitt overslag ble ca 14 timer.)

Eks. 7: Diffusjon med "kilde" i origo

133

$n(\vec{r}, 0) = N \cdot \delta(\vec{r})$, dvs N molekyler i origo ved $t=0$.

Hva blir $n(\vec{r}, t)$?

Løsning: $\frac{\partial n}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 n$

Fourier + Laplace (i hver rom og tid) gir

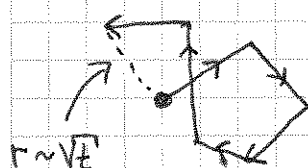
$$\underline{n(r, t) = N \left(\frac{1}{4\pi Dt} \right)^{3/2} e^{-r^2/4Dt} \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)}$$

[Sett inn og vis at dette er en løsning.]

$$\langle r^2 \rangle = 3 \langle x^2 \rangle = 6Dt \Rightarrow \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6Dt} \sim \sqrt{t}$$

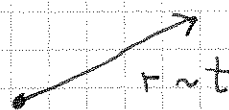
som vi har sett tidligere (skalering, s. 125)

Virrevandring ("Random walk") (Brownske bevegelser):



diffusjon

vs



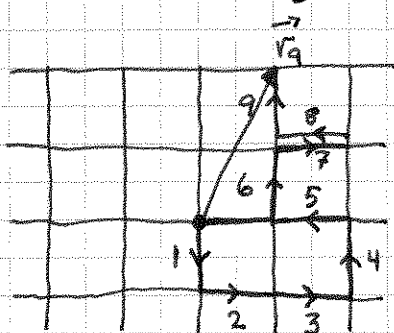
rettlinjet bevegelse
(uten kollisjoner)

Hit

23.04.13

Dette kan simuleres på et gitter, i en eller flere dimensjoner.

Eks: Kvadratisk gitter i 2D



Med mange "partikler" og/eller mange tidssteg bør en gjenfinne

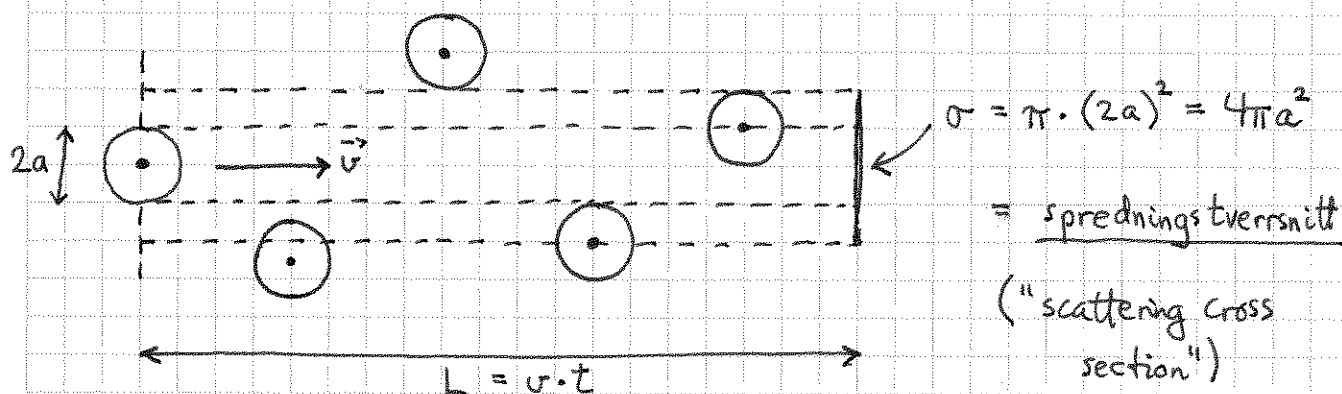
$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \sim \sqrt{t}$$

I dag: Transportkoeffisienter η og D for gasser, med utgangspunkt i kinetisk gassteori.

10.1 Midlere fri veilengde [LHL 14.4]

Vil bestemme λ = midlere avstand tilbakelagt av gitt molekyl mellom to påfølgende kollisjoner

Modell: Harde kuler med radius a



Ser at kula med hastighet $\vec{v}$ kolliderer med kuler med posisjon (dus sentrum) inni sylinder med volum

$$V_t = L \cdot \sigma = \sigma v t \quad (= 4\pi a^2 v t)$$

i løpet av tid t .

Midlere antall partikler i V_t :

$$N_t = N \cdot \frac{V_t}{V} = n \cdot V_t = n \sigma v t \quad \left(n = N/V = \text{partikkel-tettheten} \right)$$

Kollisjonsfrekvens: $N_t / t = n \sigma v$

Midlere kollisjonsfrekvens: $Z = n \sigma \langle v \rangle = 1/\tau$

τ = midlere tid mellom kollisjoner ("collision time")

Midlere fri veilengde: $\lambda = L / N_t = v t / n \sigma v t = \underline{1 / n \sigma}$

Alle partiklene beveger seg, så vi bør heller bruke
midlere relativ fart

$$\textcircled{1} \rightarrow \vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \leftarrow \textcircled{2} \Rightarrow \rightarrow \vec{u}$$

$$\langle u \rangle = \langle |\vec{u}| \rangle = \langle |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \rangle = \dots \text{PCH 10.1} \dots = \sqrt{2} \langle v \rangle,$$

som gir

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}}$$

$$(\text{og } z = \frac{1}{z} = \sqrt{2} n \sigma \langle v \rangle)$$

[Fortsatt bare en tilnærmelse, da kollisjonene er for enkelt beskrevet. Mer i f.eks. TFY4275 Klassisk transportteori.]

Eks 1: Molekylenes fri veilengde i luft ved normale betingelser

$$T = 293 \text{ K}, \quad p_1 = 1 \text{ atm} \approx 10^5 \text{ Pa}, \quad a \approx 1.5 \text{ \AA} \quad (\text{O}_2 \text{ og N}_2)$$

$$n_1 = p_1 / kT = 10^5 / 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 = 2.5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma_1 = 4\pi a^2 = 2.8 \cdot 10^{-19} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2} n_1 \sigma_1} = 10^{-7} \text{ m} = \underline{\underline{1000 \text{ \AA}}}$$

Tilgjengelig volum pr molekyl:

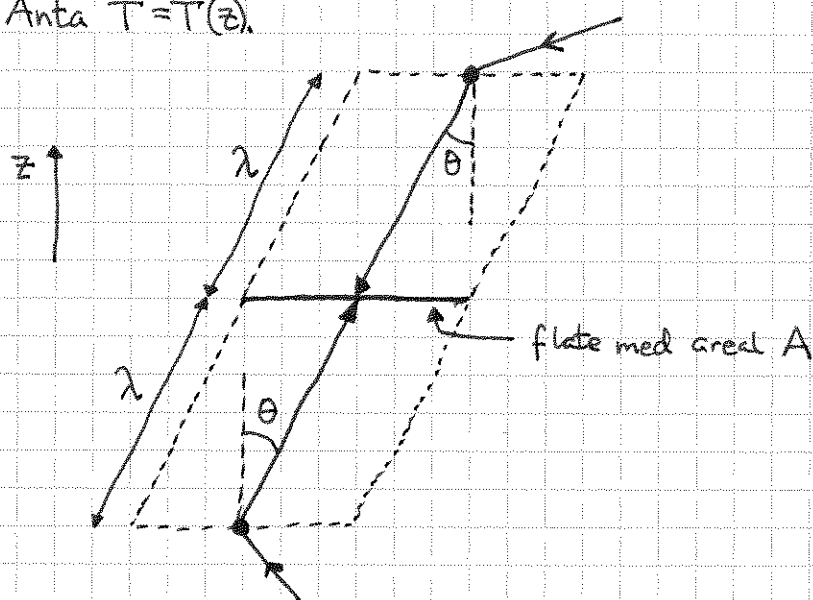
$$V/N = kT/p_1 \approx (34 \text{ \AA})^3, \text{ dvs midlere avstand mellom nabomolekyler er } l \approx 34 \text{ \AA} \ll \lambda_1, \text{ rimelig når } a \ll l.$$

Eks 2: Katodestrålerør, "CRT" (Nostalgi!?)

Typisk trykk: $p_2 \approx 10^{-8} \text{ atm}$. Anta $a \approx 0$ for elektron, samt $v(\text{elektron}) \gg v(\text{molekyl}) \approx 0$. Elektronenes midlere fri veilengde

$$\text{blir: } \lambda_2 = \frac{1}{n_2 \sigma_2} = \underbrace{\sqrt{2} \cdot 4 \cdot 10^8}_{=\lambda_2/\lambda_1} \cdot \lambda_1 \approx 6 \cdot 10^8 \text{ \AA} = \underline{\underline{60 \text{ m}}}$$

Bra: Med 30 cm langt rør vil bare $\frac{0.3}{60} = 0.5\%$ av elektronene kollideres

Anta $T = T(z)$.

$$T_A + \lambda \cos \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = T_{\text{ned}}$$

$$T_A$$

$$T_A - \lambda \cos \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = T_{\text{opp}}$$

$\{\pm \lambda \cos \theta\}$ = midlere z -avstand for kryssende partikkels siste kollisjon, på vei $\begin{cases} \text{ned} \\ \text{opp} \end{cases}$

Middelenergi pr partikkel: $e = c_v \cdot T$

der c_v = varmekap. pr partikkel = $\frac{3}{2}k$ ert $\frac{5}{2}k$ for
enatomig ert toatomig gass (se s 23 og 41)

[Eller like gjerne $c_p = c_v + k$?!]

Netto energistrøm (opp) gjennom A , fra partikler i volumet
vist oven for: (i løpet av dt)

$$dQ = dQ_{\text{opp}} - dQ_{\text{ned}}$$

$$= e_{\text{opp}} \cdot dj_{\text{opp}} \cdot A \cdot dt - e_{\text{ned}} \cdot dj_{\text{ned}} \cdot A \cdot dt$$

Her er

$$dj_{\text{opp}} = dj_{\text{ned}} = dj = n v \cos \theta F(v) d^3v = \text{antall partikler}$$

som treffer A pr tidsenhet og pr flateenhet, og med
hastighet mellom $\vec{v}$ og $\vec{v} + d\vec{v}$ ($d\vec{v} = d^3v$), se s 115.

$$\text{Energiforskjell: } e_{\text{opp}} - e_{\text{ned}} = -2c_v \lambda \cos \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial z}$$

Dermed:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= (e_{\text{opp}} - e_{\text{ned}}) \cdot dj \cdot A \\ &= -2c_v \lambda \cos \theta \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \cdot n v \cos \theta F(v) d^3v \cdot A \end{aligned}$$

Integrasjon gir total varme gjennom A pr tidsenhet

($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq v \leq \infty$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dQ}{dt}\right)_{\text{total}} &= -2n\lambda c_v A \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}_{=\left[-\frac{1}{3}\cos^3 \theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} v F(v) v^2 dv}_{=\frac{\langle v \rangle}{4\pi}} \\ &= -\frac{1}{3} n \lambda c_v A \langle v \rangle \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

Fra s. 121:

$$\frac{dQ}{dt} = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{Fouriers lov; definerer } \kappa)$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{1}{3} n \lambda c_v \langle v \rangle$$

Med $\lambda = (\sqrt{2} n \sigma)^{-1}$ og $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ fås:

$$\boxed{\kappa = \frac{2c_v}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}}$$

Varmeledningsevne, fra
kinetisk gasteori

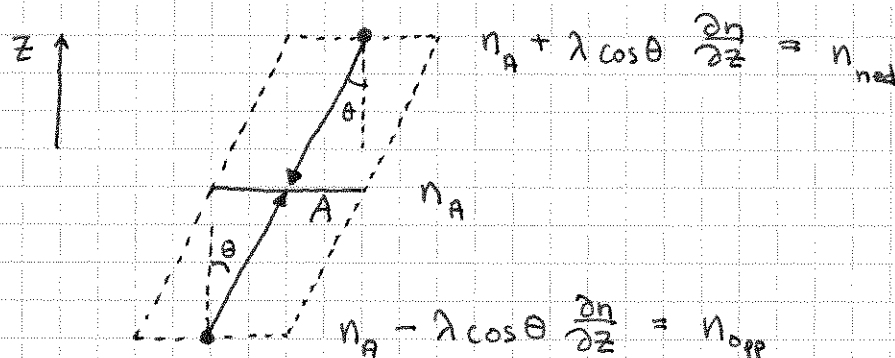
Merk:

- κ er uavhengig av tettheten n , dvs uavh. av trykket p
- gjelder ikke i Knudsen-området, dvs når λ blir like stor som systemets lineære utstrekning. Da blir $\kappa \sim n$.

Diffusjonskonstanten D for gasser:

(138)

Antar nå at tettheten varierer, $n = n(z)$: [Dvs: Tettheten er en bestemt type partikler!]



Med $n_{\text{opp}} \neq n_{\text{ned}}$ blir $dj_{\text{opp}} \neq dj_{\text{ned}}$, og i stedet for energistrømmen dQ betrakter vi netto partikkelstrøm (opp) gjennom flaten A : [Dvs: Nettostrøm er den bestemte type partikler!]

$$\begin{aligned} dN &= dN_{\text{opp}} - dN_{\text{ned}} \\ &= (dj_{\text{opp}} - dj_{\text{ned}}) A dt \\ &= (n_{\text{opp}} - n_{\text{ned}}) v \cos \theta F(v) d^3v A dt \\ &= -2\lambda \cos \theta \frac{\partial n}{\partial z} v \cos \theta F(v) d\phi \sin \theta d\theta v^2 dv A dt \end{aligned}$$

Integrasjon over ϕ , θ og v blir som på s. 137, slik at

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{\text{tot}} = -\frac{1}{3} \lambda A \langle v \rangle \frac{\partial n}{\partial z}$$

$$\text{Ficks lov: } \frac{dN}{dt} = -D \cdot A \cdot \frac{\partial n}{\partial z} \quad (\text{evt. } j = \frac{dN}{A dt} = -D \frac{\partial n}{\partial z})$$

$$\Rightarrow D = \frac{1}{3} \lambda \langle v \rangle$$

som med $\lambda = (\sqrt{2} n \sigma)^{-1}$ og $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$ gir

$$D = \frac{2}{3 n \sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstanten, fra kinetisk gasteori. [Med $n = \text{total gass tetthet}$.]

[Med, som nevnt s. 135, usikker tellfaktor $\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \approx 0.38$, se evt: $D \sim \frac{\sqrt{kT/m}}{n \sigma}$]

Tallverdier, kinetisk teori vs eksperiment:

Ved 20°C og 1 atm er

$$\kappa \approx 0.026 \text{ W/m}\cdot\text{K} \quad \text{i luft}$$

$$D \approx 0.2 \text{ cm}^2/\text{s} \quad \text{for } \text{O}_2 \text{ i luft}$$

Vår tilnærmede teori gir:

$$a \approx 1.5 \text{ \AA}, \quad C_v = \frac{5}{2}k \quad (\text{evt. } C_p = \frac{7}{2}k), \quad m \approx 32u \quad (\text{O}_2)$$

$$n \approx p/kT = 1.013 \cdot 10^5 / 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 = 2.5 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$\Rightarrow \kappa \approx \frac{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}}{3 \cdot 4\pi \cdot (1.5 \cdot 10^{-10})^2} \cdot \sqrt{\frac{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{\pi \cdot 32 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}} \approx 0.013 \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

$$(\text{evt. } 0.018 \text{ W/m}\cdot\text{K} \text{ med } C_p = \frac{7}{2}k \text{ i stedet for } C_v = \frac{5}{2}k)$$

$$D \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 / 32 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}}{2.5 \cdot 10^{25} \cdot 4\pi \cdot (1.5 \cdot 10^{-10})^2} \approx 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 0.15 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

Ikke så verst samsvar!

Vi ser at vår enkle teori gir sammenhengen

$$\kappa/D = n \cdot c$$

mellom transportkoeffisientene κ og D .(Med $c = c_v$ eller c_p)

(Ekipartisjonsprinsippet tilsier $e = \frac{3}{2}kT$ for 1-atomig gass, og $e = \frac{5}{2}kT$ for 2-atomig gass, når de to rotasjonsfrihetsgradene er "våkne". Men teorien brukt her er som sagt ikke nøyaktig nok til å stole på tallfaktorene som inngår.)