10.3 Fouriers lov. Varmeledningslignngen [LHL 18.1, 18.5; YF 17.7]

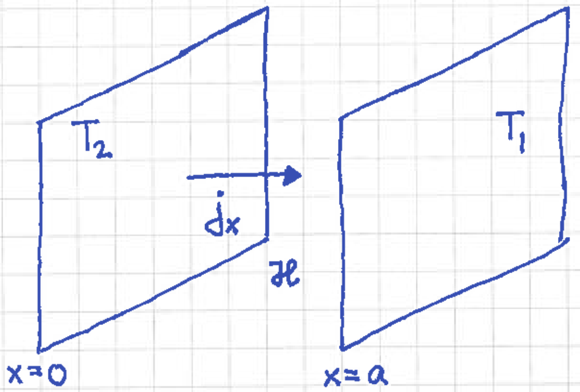
Erfaringsmessig (Eksperimentelt) er overført varme prop. med temperaturfall pr lengdeenhet, dvs gradienten til T:

$$\boxed{\vec{j} = -\mathcal{H}\,\nabla T}$$ Fouriers lov

$\vec{j}$ = overført varme pr flate- og tidsenhet, dvs varmestrømtetthet, med enhet W/m^2

$\mathcal{H}$ = varmeledningsevnen til stoffet som varmen transporteres gjennom, enhet W/m·K

Stasjonær (dvs tidsuavhengig) varmeledning i en retning:



To store parallelle plan, innbyrdes avstand a, faste temp. T_2 og $T_1 < T_2$.

Bestem $T(x)$ og j_x

Stasjonære forhold ⇒ samme j_x overalt (ellers ville strøm inn ≠ strøm ut ved gitt x, og dermed ikke stasjonære forhold)

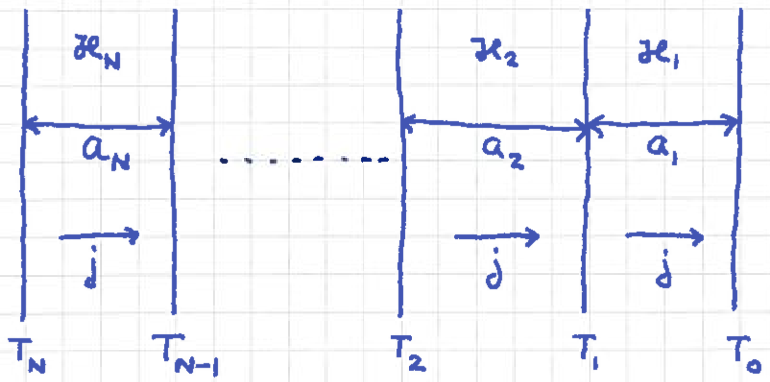
$\Rightarrow \quad dT/dx = \text{konst.} \quad \Rightarrow \underline{\underline{T(x) = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{a}\,x}}$ $\quad \left[\begin{array}{l}\Rightarrow T(0) = T_2 \text{ og} \\ T(a) = T_1,\ \text{ok}\end{array}\right]$

$\Rightarrow \quad j_x = -\mathcal{H}\,dT/dx = \underline{\underline{\mathcal{H}\,(T_2 - T_1)/a}}$

$\Rightarrow \quad j_x = K \cdot \Delta T \quad ; \quad K = \mathcal{H}/a$ = varmegjennomgangstallet

Dvs: Analogt med Ohms lov, med $j_x \leftrightarrow I$, $\Delta T \leftrightarrow \Delta V$, $K^{-1} \leftrightarrow R$

Med N lag og gitte (faste) T_N og $T_0 < T_N$:

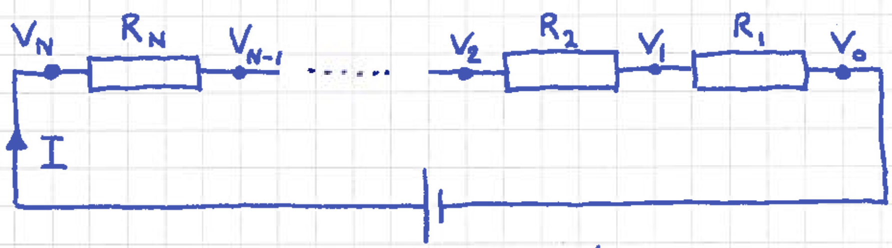


Stasjonært $\Rightarrow$ samme varmestrømtetthet j overalt

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} T_1 - T_0 &= j / K_1 \\ T_2 - T_1 &= j / K_2 \\ &\vdots \\ T_N - T_{N-1} &= j / K_N \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = T_N - T_0 = j / K = j \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{K_i}$$

Analogt N seriekoblede resistanser :



$$\Delta V = V_N - V_0$$

Ohms lov: $\Delta V = R I = \left(\sum_{i=1}^{N} R_i \right) I$

Analoge størrelser : $\Delta T \leftrightarrow \Delta V$, $j \leftrightarrow I$, $K_i^{-1} = \frac{a_i}{\varkappa_i} \leftrightarrow R_i$

Med j bestemt $(j = K \cdot \Delta T)$ kan $T_1, T_2, \cdots, T_{N-1}$ beregnes :

$T_1 = T_0 + j / K_1$ osv.

Eks: Husvegg, 3cm gran + 20cm glava + 3cm gran,
bestem K, j og $T(x)$ med 20°C inne, -10°C ute.
Oppgitt: $\mathcal{H}_{gran} = 0.14$, $\mathcal{H}_{glava} = 0.047$ $(W/m \cdot K)$

Løsn: $K = \{2 \cdot 0.03/0.14 + 0.20/0.047\}^{-1} = \underline{0.21\ W/m^2 \cdot K}$

$$j = K \cdot \Delta T = 0.21 \cdot 30 = \underline{6.3\ W/m^2}$$

$$T_1 = -10 + 6.3 \cdot 0.03/0.14 = -8.65\ °C$$

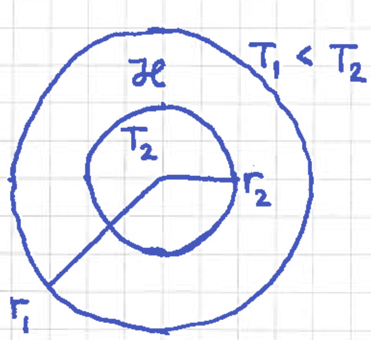
$$T_2 = +20 - 6.3 \cdot 0.03/0.14 = +18.65\ °C$$

(hhv innsida av ytterpanel og utsida av innerpanel)

Hvorfor ikke luft mellom ytter- og innerpanel?
$\mathcal{H}_{luft} = 0.024 < \mathcal{H}_{glava} \Rightarrow$ redusert varmeledning.
Men stort <u>strålingstap</u>:

$$j_s = \sigma(T_2^4 - T_1^4) = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot (291.65^4 - 264.35^4) \simeq \underline{133\ W/m^2}\ (!)$$

Stasjonær varmeledning med sylindersymmetri:



Grensebetingelser:
$T(r_1) = T_1$, $T(r_2) = T_2 > T_1$

Stasjonære forhold
$\Rightarrow$ Konstant varme $\dot{Q}$ pr tidsenhet gjennom sylinderflate med radius r $(r_2 < r < r_1)$ og lengde L, dvs areal $A(r) = 2\pi r L$

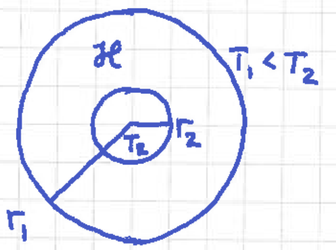
Sylindersymmetri:
$\nabla T = \hat{r}\ dT/dr$
$\vec{j} = \hat{r}\ j(r)$

$$j(r) = \frac{\dot{Q}}{A(r)} = \frac{\dot{Q}}{2\pi r L} \overset{\text{Fouriers Lov}}{=} -\varkappa \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{Q}}{L} \cdot \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = -2\pi\varkappa \int_{T_2}^{T_1} dT$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{\dot{Q}}{L} = \frac{2\pi\varkappa\,(T_2 - T_1)}{\ln(r_1/r_2)}} = \text{varmestrøm pr lengdeenhet (radielt utover)}$$

Stasjonær varmeledning med kulesymmetri:



Konst. varme $\dot{Q}$ pr tidsenhet gjennom kuleskall med areal $A(r) = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow j = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} = -\varkappa \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} \int_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r^2} = -4\pi\varkappa \int_{T_2}^{T_1} dT$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot{Q} = \frac{4\pi\varkappa\,(T_2 - T_1)}{r_2^{-1} - r_1^{-1}}} = \text{varmestrøm (radielt utover)}$$

<u>U - verdi</u> [LHL 18.4]

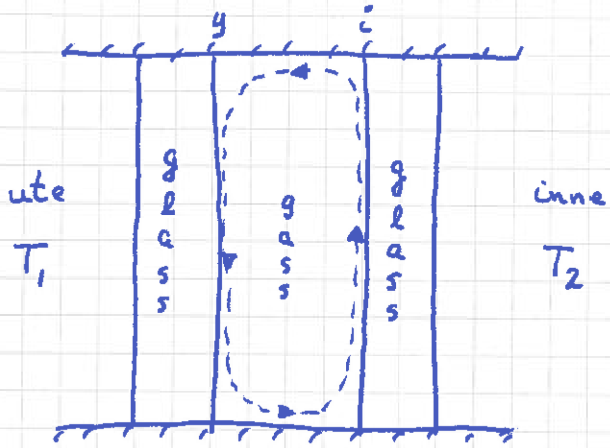
Byggebransjen: $\boxed{j = U \cdot \Delta T}$

j = total varmestrømtetthet (W/m^2)

$\Delta T = T_{inne} - T_{ute}$ (K)

U = U-verdien $(W/m^2 \cdot K)$

Eks: Dobbeltvindu



$\Delta T = T_2 - T_1$

Total varmestrøm: $j = j_\varkappa + j_\sigma + j_{konv}$

Varmeledning: $j_\varkappa = K \cdot \Delta T \sim \Delta T$

Stråling: $j_\sigma = \beta \cdot \sigma (T_2^4 - T_1^4) \sim \Delta T$

[$\beta < 1$ hvis ikke helt gjennomsiktig glass;
$T_2^4 - T_1^4 = (T_2^2 + T_1^2)(T_2 + T_1)(T_2 - T_1) \sim \Delta T$]

Konveksjon: oppvarming ved i, avkjøling ved y
$\Rightarrow$ strømning som i figuren; $j_{konv} \sim \Delta T$ (grovt sett)

Analogi med Ohms lov:

$I = G \cdot \Delta V$; G = konduktans

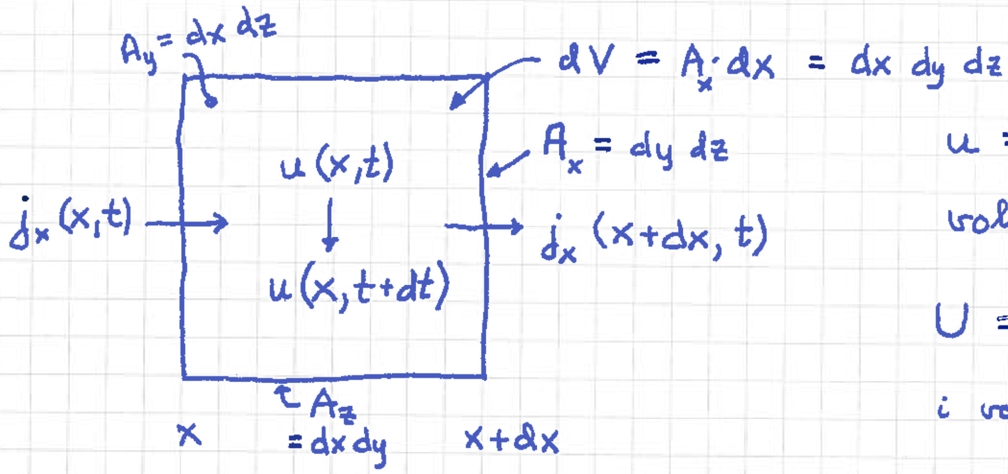
$j = U \cdot \Delta T$; U = U-verdi

Rom med varmetap gjennom vegger, vinduer, gulv, tak:
Analogt med parallellkobling av konduktanser:
$j = \sum_i j_i = (\sum_i U_i) \Delta T = U \Delta T$

Varmeledningsligningen

Generelt avhenger temperaturen av rom og tid: $T = T(\vec{r}, t)$

Energibevarelse gir kontinuitetsligning, som kombinert med Fouriers lov gir varmeledningsligningen for $T(\vec{r}, t)$.



u = energi pr volumenhet

$U = u\,dV$ = energi i volum $dV = A_x dx$

Endring i U mellom t og $t+dt$:

$$dU = [u(x, t+dt) - u(x,t)] \cdot dV$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt \cdot A_x \cdot dx = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dV \cdot dt$$

Skyldes netto innstrømming av energi:

$$dU = [j_x(x,t) - j_x(x+dx,t)] \cdot A_x \cdot dt$$

$$= -\frac{\partial j_x}{\partial x} \cdot dx \cdot A_x \cdot dt$$

Bidrag fra netto innstrømming i y- og z-retning:

$$\left(-\frac{\partial j_y}{\partial y} dy\,A_y - \frac{\partial j_z}{\partial z} dz\,A_z\right) dt$$

Total netto tilført energi mellom t og $t+dt$:

$$-\nabla \cdot \vec{j} \cdot dV \cdot dt \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \quad (= \text{div}\,\vec{j})$$

Dermed: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0}$ Kont. lign. for energi

For et fast (lite) volum V:

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{d(u \cdot V)}{dT} = V \frac{du}{dT}$$

$\Rightarrow \; du = c \cdot dT \quad ; \quad c = \frac{C_V}{V}$ = varmekap. pr vol.enhet

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Fouriers lov gir: $\nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$

For gitt materiale med κ = konstant: $\nabla \cdot \vec{j} = -\kappa \nabla^2 T$
(uniformt medium)

der $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (Laplace-operator)

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T}$$ Varmeledningsligningen (Heat equation)

$D_T = \kappa / c$ = termisk diffusivitet (m^2/s)

10.6 + 10.8 Ficks lov. Diffusjonsligningen [LHL 18.5]

Vi ser <u>ikke</u> på partikkeltransport pga trykkforskjeller.
[$\nabla p \neq 0 \Rightarrow$ strømning / vind / konveksjon]

Vi antar konstant p, dvs konstant <u>total</u> partikkeltetthet, men tettheten $n(\vec{r}, t)$ for en <u>gitt type</u> partikler varierer.

<u>Fenomenologisk</u> som for varmetransport, med $T \to n$.

Erfaringsmessig er partikkelstrømtettheten prop. med tetthetsreduksjon pr lengdeenhet:

$$\boxed{\vec{j} = -D\nabla n}$$

Ficks lov

$\vec{j}$ = (netto) antall partikler (av gitt type) gjennom flate, pr flate- og tidsenhet; enhet $1/m^2s$

n = antall partikler (av gitt type) pr volumenhet, enhet $1/m^3$

D = diffusjonskonstanten, enhet m^2/s

Partikkelbevarelse gir

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0}$$

kontinuitetsligning for partikkelantall

Dermed:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla\cdot(D\nabla n)$$

(generelt)

Med D = konstant:

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n}$$

Diffusjonsligningen

Skalering

$\boxed{\partial T/\partial t = D_T \nabla^2 T}$ $\Rightarrow$ uendret ligning dersom alle lengder skaleres med faktor a og tida skaleres med faktor a^2:

$\vec{R} = a \cdot \vec{r}$ $\Rightarrow$ $\nabla = a \cdot \nabla_R$, $\nabla^2 = a^2 \nabla_R^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D_T\, a^2 \nabla_R^2 T \quad \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial (a^2 t)} = D_T \nabla_R^2 T$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial T}{\partial \tau} = D_T \nabla_R^2 T} \qquad (\tau = a^2 t)$$

Dvs: Hvis en bestemt T oppnås i avstand r etter tid t, vil samme T oppnås i avstand $R = a \cdot r$ etter tid $\tau = a^2 \cdot t$.

Eks: Koketid (dvs gitt T i midten) for poteter av ulik størrelse (men samme form); øving 12.

Må også gjelde for diffusjon, da ligningen ser likedan ut: $\partial n/\partial t = D \nabla^2 n$

Brownske bevegelser, virrevandring ("random walk")

Med N molekyler i origo ved $t=0$,

$$n(\vec{r},0) = N \cdot \delta(\vec{r}),$$

hva blir $n(\vec{r},t)$?

Fourier i rom + Laplace i tid (TMA4120) gir

$$n(\vec{r},t) = N\,(4\pi D t)^{-3/2}\,\exp\left(-r^2/4Dt\right) \qquad (r^2 = x^2+y^2+z^2)$$

(Sjekk selv ved innsetting i $\partial n/\partial t = D\nabla^2 n$)

Hvor raskt sprer molekylene seg utover?

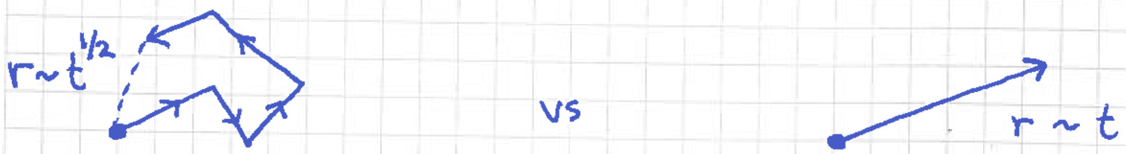
$$\langle r^2(t)\rangle = \frac{1}{N}\int r^2\, n(r,t)\, d^3r$$

$$= (4\pi D t)^{-3/2} \int_0^\infty r^2 e^{-r^2/4Dt} \cdot 4\pi r^2\, dr$$

$$\int_0^\infty r^4 e^{-\alpha r^2}\, dr = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} r^4 e^{-\alpha r^2}\, dr = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\alpha^{-5/2}$$

$$\Rightarrow \langle r^2(t)\rangle = (4\pi D t)^{-3/2}\cdot 4\pi\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\cdot(4Dt)^{5/2} = \underline{6Dt}$$

$\Rightarrow$ Midlere diffusjonslengde: $\sqrt{\langle r^2(t)\rangle} = \sqrt{6Dt} \sim t^{1/2}$



Diffusjon

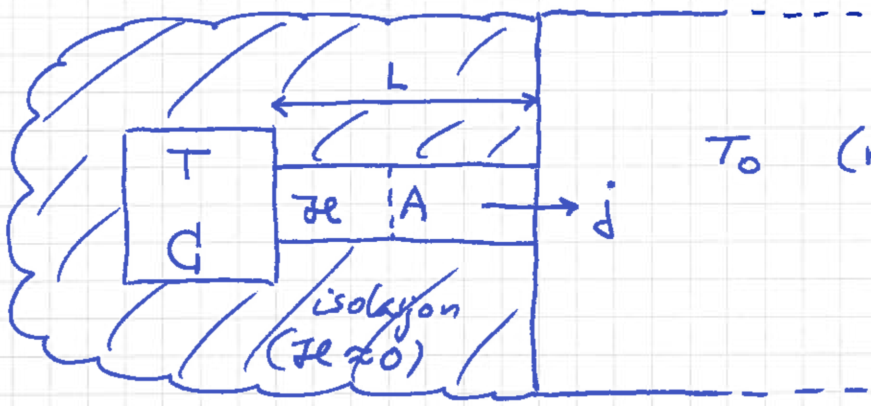
Bevegelse uten kollisjoner

Eks: Luft, 0°C, 1 atm: $D = 1.85\cdot 10^{-5}\ m^2/s$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle r^2(1s)\rangle} \approx 1\,cm, \quad \sqrt{\langle r^2(1\,time)\rangle} \approx 63\,cm$$

Brownske bevegelser: F.eks. pollenkorn i vann; synlig i mikroskop.

Newtons avkjølingslov



Hvordan avkjøles det endelige systemet (med varmekap. C) via varmelederen med lengde L, tverrsnitt A, varmeledn.evne $\varkappa$?

Løsning:

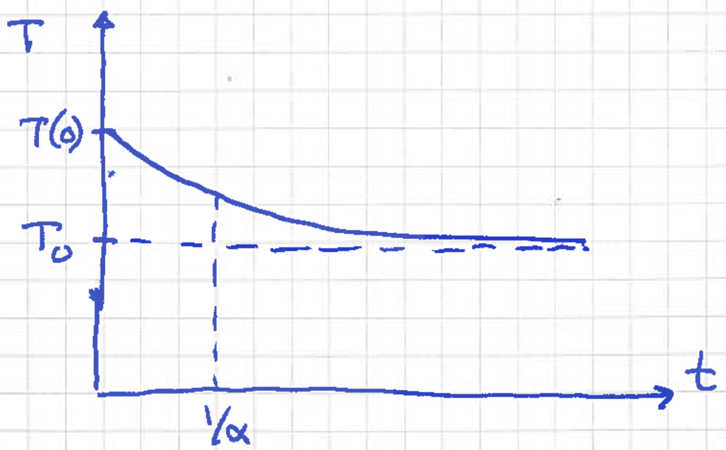
Fouriers lov $\Rightarrow$ $j = \varkappa \cdot \dfrac{T - T_0}{L}$

Dessuten: $j = -\dfrac{dQ/dt}{A} = -\dfrac{C\, dT/dt}{A}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = -\frac{\varkappa \cdot A}{C \cdot L} \cdot (T - T_0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dT}{T - T_0} = -\alpha\, dt \qquad (\alpha = \varkappa A / CL)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{T(t) = T_0 + [T(0) - T_0]\, e^{-\alpha t}}$$



Se også øving 12, om fjernvarmeanlegg.