Avsluttende eksempler

Eks 1. Potetkoking. Skalering

Hvis rundpoteter som veier 40 g er ferdigkokt på 15 minutter, hvor lang tid trenger en som veier 100 g ?

Løsn 1. Ferdigkokt betyr en viss temperatur T i midten. Varmeledningsligningen $\partial T/\partial t = D_T \nabla^2 T$ er uendret hvis alle lengder skaleres med en faktor α og tida samtidig skaleres med faktoren α^2:

$$(r,t) \rightarrow (\alpha r, \alpha^2 t) \;:\; \frac{\partial T}{\partial(\alpha^2 t)} = D_T \left(\frac{\nabla}{\alpha}\right)^2 T$$

Her skaleres potetradien med faktoren

$$\alpha = (100/40)^{1/3} = 1.357$$

Koketida øker dermed med faktoren $\alpha^2 = 1.842$, fra 15 min. til 28 min.

Eks 2. Is på innsjø

Anta konstant temp. 0°C i vannet og konstant temp. 0°C $-\Delta T$ i lufta. Hvordan øker istykkelsen z med tida t ? Anta kun varmeledning gjennom isen.

Løsn 2. Fouriers lov : $j = dQ/dt \cdot A = \kappa \, \Delta T/z$

Når vannvolumet $A \cdot dz$ fryser til is, avgis varmemengden $dQ = l_{sm} \cdot dm = l_{sm} \cdot \rho \cdot A \cdot dz$. Her er l_{sm} smeltevarme pr masseenhet og ρ er masse pr volumenhet. Innsetting i Fouriers lov gir

$$l_{sm} \cdot \rho \cdot dz/dt = \kappa \cdot \Delta T/z \;\Rightarrow\; z \cdot dz = \frac{\kappa \cdot \Delta T}{l_{sm} \cdot \rho} \cdot dt$$

$$\Rightarrow z(t) = \sqrt{2\kappa \, \Delta T \cdot t / l_{sm} \cdot \rho}$$

Tallverdier : $\ell_{sm} = 3.34 \cdot 10^5$ J/kg, $\rho = 10^3$ kg/m^3
$\mathcal{H} = 2.2$ W/K·m. Et døgn $(24 \cdot 3600\,s)$ med 5 kuldegrader gir $z = 7.5$ cm.

Eks 3. Temperatursvingninger gjennom året nedover i bakken. Anta harmoniske svingninger på overflaten med periode $2\pi/\omega$ lik et år. Se også på periode et døgn.

Løsn 3. $T(0,t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$, dvs vi velger $t=0$ om sommeren og $t = \pi/\omega$ om vinteren, og $T(0,t)$ varierer mellom $T_0 + T_1$ og $T_0 - T_1$. Boka (PCH 10.4) dropper utledningen og går rett på løsningen $T(z,t)$. Matematikk 4K ville vel ha kombinert Laplace- og Fouriertransformasjoner. Vi løser problemet ved å observere at varmeledningsligningen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

er identisk med Schrödingerligningen i en romlig dimensjon for en fri partikkel i potensial $V=0$,

$$i\hbar \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

med imaginær masse $m = i\hbar/2D_T$. Da vet vi at løsningen er en plan bølge

$$T(z,t) = T_0 + T_1 e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

Grensebetingelsen er oppfylt når vi tar realdelen av T. Innsetting gir $\hbar\omega = -i\hbar k^2 D_T$ og dermed

$$k^2 = \frac{i\omega}{D_T} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega}{D_T}} \cdot \sqrt{i} \; ; \; \sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow T(z,t) = T_0 + T_1\, e^{-z\sqrt{\omega/2D_T}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2D_T}}\, z - \omega t\right)$$

En dempet bølge nedover i bakken.

For leire, sand, grus etc varierer D_T mellom $10^{-7}\ m^2/s$ og $10^{-6}\ m^2/s$. Med periode 1 år er $\omega = 2\cdot 10^{-7}\ s^{-1}$.

Med f.eks. $D_T = 4\cdot 10^{-7}\ m^2/s$ er $\sqrt{2D_T/\omega} = 2\ m$.

Da er $T(z,t)$ i motfase med $T(0,t)$ i dybden $z = 2\cdot\pi\ m = 6.3\ m$ under overflaten, dvs der er det kaldest midt på sommeren. Men så dypt er variasjonene små, bare $e^{-\pi} \approx 4\%$ av variasjonene $(2\cdot T_1)$ på overflaten.

Døgnvariasjoner: Da er $\omega = 7.27\cdot 10^{-5}$, som med $D_T = 4\cdot 10^{-7}\ m^2/s$ gir $\sqrt{2D_T/\omega} \approx 10\ cm$. Disse svingningene merkes som ventet bare ned til 20-30 cm under bakken.

Eks 4. Diffusjon med lokal kilde

Med N molekyler i et lite volum omkring origo ved $t=0$, hvor raskt sprer molekylene seg utover?

Løsn 4. Diffusjonsligningen

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\cdot\nabla^2 n$$

kan skrives på formen

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = \nabla^2 n \quad ; \quad \tau = D\cdot t \; ; \; [\tau] = m^2$$

som viser at $\sqrt{D\cdot t}$ er en "karakteristisk" lengde i problemet. Det raske svaret blir derfor at molekylene (dvs en god del av dem) etter en tid t har diffundert til en avstand av <u>størrelsesorden</u> $\sqrt{D\cdot t}$.

Med små molekyler i luft er $D \approx 2 \cdot 10^{-5}\ m^2/s$

som gir $\sqrt{D \cdot t} \approx 27\ cm$ etter 1 time.

Eksakt løsning med $n(\vec{r}, 0) = N \cdot \delta(\vec{r})$ er

$$n(\vec{r}, t) = n(r, t) = N \cdot (4\pi D t)^{-3/2} \exp(-r^2/4Dt)$$

(Sjekk selv ved å sette inn; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ med kulesymmetri

Et passende mål for spredning av molekylene er midlere diffusjonslengde $d(t) = \sqrt{\langle r^2(t) \rangle}$, der

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{N} \int r^2 n(r,t)\, d^3r = \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty r^2 n(r,t) r^2 dr$$

Med (B.5) i Appendix B blir $\langle r^2(t) \rangle = 6Dt$

slik at $d(t) = \sqrt{6Dt}$. Med D som over: $d \approx 66\ cm$.

Virrevandring (Random walk). Brownske bevegelser.

La oss beskrive diffusjonsprosessen som en tilfeldig bevegelse, steg for steg med like lange steg $|\Delta \vec{r}_j| = a$, i tilfeldig retning, og med konstant fart $|\vec{v}_j| = a/\Delta t$.

$$\Rightarrow \langle \vec{r}^{\,2}(t) \rangle = \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \langle \Delta \vec{r}_j \cdot \Delta \vec{r}_k \rangle = \sum_{j=1}^{M} \langle \Delta \vec{r}_j^{\,2} \rangle = a^2 \cdot M$$

Har her brukt at $\langle \Delta \vec{r}_j \cdot \Delta \vec{r}_{k \neq j} \rangle = 0$, da alle steg foretas i tilfeldige retninger. Og $t = M \cdot \Delta t$. Dermed:

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{a^2}{\Delta t} \cdot t = a \cdot \frac{a}{\Delta t} \cdot t = a \cdot v \cdot t$$

Her er a og v i virkeligheten middelverdier:

$\langle a \rangle = \lambda$ = midlere fri veilengde

$\langle v \rangle$ = midlere partikkelfart; i gass prop. med $\sqrt{k_B T/m}$

Sammenligning med Eks 4 gir at diffusjonskonstanten D er prop. med $\lambda \cdot \langle v \rangle$, dvs prop. med $\lambda \cdot \sqrt{k_B T/m}$.