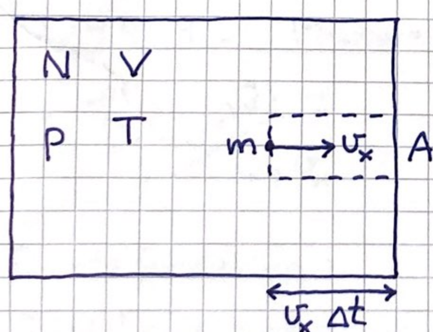
Kinetisk teori

9.1 Kinetisk gassteori; antagelser

- Lav tetthet, $V_{molekyl} \ll V/N$ = tilgjengelig volum pr molekyl. Oppfylt ved normale betingelser:
  $V_{molekyl} \approx (3\,\text{Å})^3$
  $V/N = k_B T/p \approx 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300/10^5 \ m^3 \approx (35\,\text{Å})^3$
- Klassisk dynamikk med elastiske kollisjoner mot glatte vegger; impuls $\parallel$ veggen bevart i en kollisjon
- Isotropi: ingen foretrukne retninger

9.3 Trykk i ideell gass



N2: $F_x = \Delta P_x / \Delta t$

Trykk mot veggen:

$$p = F_x / A = \Delta P_x / A \cdot \Delta t$$

Impuls overført fra gassmolekylene til A i løpet av Δt:

$$P_x = \underbrace{\tfrac{1}{2} N}_{\substack{\text{antall} \\ \text{med } v_x > 0}} \cdot \underbrace{\frac{A v_x \Delta t}{V}}_{\substack{\text{andel som} \\ \text{treffer A} \\ \text{i løpet av } \Delta t}} \cdot \underbrace{2 m v_x}_{\substack{\text{overført impuls} \\ \text{pr molekyl}}}$$

$$\Rightarrow p = \frac{N}{V} \cdot m v_x^2$$

Molekylene har en fordeling av hastigheter, så vi må bruke midlere v_x^2, dvs $\langle v_x^2 \rangle$.

Pga isotropi : $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$

$$\Rightarrow p = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{N}{V} \cdot \frac{2}{3} \langle E_k^{trans} \rangle$$

Midlere translasjonsenergi pr molekyl : $\langle E_k^{trans} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$

Tilstandsligningen for ideell gass gir nå en mikroskopisk tolkning av temperatur : $p = Nk_BT/V$

$$\Rightarrow \langle E_k^{trans} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

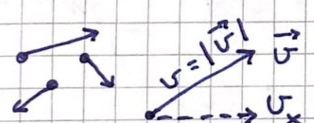
Dvs at T er et mål på molekylenes midlere translasjonsenergi.

Eks: C_V for edelgasser. Atomære gasser, slik at

$E_k = E_k^{trans} \quad \Rightarrow \quad U = N \cdot \langle E_k^{trans} \rangle = \frac{3}{2} Nk_BT$

$\Rightarrow C_V = \partial U / \partial T = \frac{3}{2} Nk_B = \frac{3}{2} nR$, i samsvar med eksp.

9.2, 9.4, 9.5 Maxwells hastighetsfordeling



Fartsfordeling :

$f(v)\,dv$ = andel molekyler med fart mellom v og $v+dv$

= sanns. for at gitt molekyl har fart —— " ——

Komponentfordeling :

$g(v_x)\,dv_x$ = sanns. for at gitt molekyl har x-komp. av $\vec{v}$ i $(v_x, v_x + dv_x)$

Normering : $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$; $\int_{-\infty}^{\infty} g(v_x)\,dv_x = 1$

Hastighetsfordeling : $F(\vec{v})\,d^3v$ = sanns. for hastighet i volumelement d^3v omkring $\vec{v}$

Normering : $\int F(\vec{v})\,d^3v = 1$

Isotropi $\Rightarrow$ $F(\vec{v}) = F(v)$ $\Rightarrow$ kulekoord. hensiktsmessig:

$$d^3v = v^2 dv\, d\Omega = v^2 dv \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$F(v)$ integrert over alle retninger må gi $f(v)$:

$$f(v)dv = \iint_\Omega F(v) v^2 dv\, d\Omega = 4\pi F(v) v^2 dv$$

Middelverdier:

$$\langle v^n \rangle = \int_0^\infty v^n f(v) dv \quad ; \quad \langle v_x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^n g(v_x) dv_x$$

Utledning av F, g og f:

Vi antar statistisk uavhengige hastighetskomponenter, dvs

$$F(v) d^3v = \{g(v_x)dv_x\} \cdot \{g(v_y)dv_y\} \cdot \{g(v_z)dv_z\}$$

[Jf. P(3 seksere med 3 terninger) $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$]

Her er jo $d^3v = dv_x\, dv_y\, dv_z$ slik at

$$F(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) \cdot g(v_z)$$

Siden $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, fungerer bare "gauss-funksjoner":

$$g(v_x) = a\, e^{-bv_x^2}$$

Dette gir

$$F(v) = a^3 e^{-bv^2}$$

dvs isotrop, som forutsatt.

Normering samt $\langle v_x^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3 = k_B T/m$ fastlegger a, b:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-bv_x^2} dv_x = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2\, a e^{-bv_x^2} dv_x = k_B T/m$$

Appendix B. Gaussintegraler

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}\,dx = \sqrt{I_0^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\,,\quad \text{siden}$$

$$I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2}dy = \iint e^{-br^2}\,dA \quad ; \quad dA = r\,d\varphi \cdot dr$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r\, e^{-br^2} = 2\pi \Big|_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2b}e^{-br^2}\right) = \frac{\pi}{b}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-bx^2}dx = 0 \; ; \quad I_3 = I_5 = \ldots = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{antisymm.}\\ \text{integrand}\end{matrix}\right)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2}dx = -\frac{d}{db}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}dx = -\frac{d}{db}\sqrt{\frac{\pi}{b}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2b^{3/2}}$$

$$i_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-bx^2}dx$$

$$i_0 = \frac{1}{2}I_0\,, \quad i_2 = \frac{1}{2}I_2 \quad \text{osv.}$$

$$i_1 = \int_0^{\infty} x\, e^{-bx^2}dx = \frac{1}{2b} \quad (\text{jf. int. over } r \text{ i } I_0^2 \text{ ovenfor})$$

$$i_3 = -\frac{d}{db}i_1 = \frac{1}{2b^2}$$

Dermed:

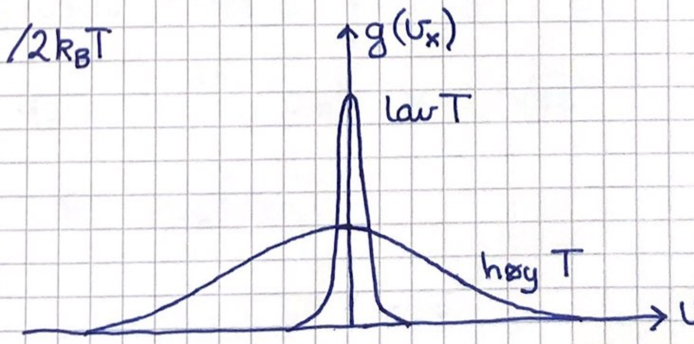
$$a \cdot \sqrt{\pi/b} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{b/\pi} = \sqrt{m/2\pi k_B T}$$

$$\Uparrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{b/\pi} \cdot \sqrt{\pi}/2b^{3/2} = k_B T/m \quad \Rightarrow \quad b = m/2k_B T$$

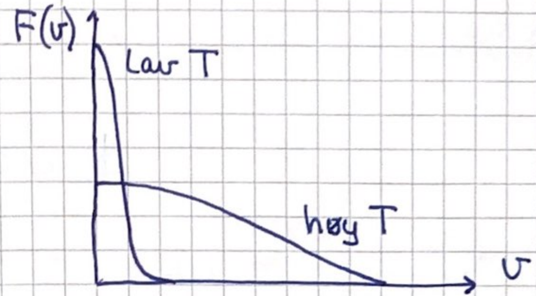
Komponentfordelingen:

$$g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}\; e^{-mv_x^2/2k_B T}$$



Hastighetsfordelingen:

$$F(v) = g(v_x)g(v_y)g(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_BT}$$



Fartsfordelingen:

$$f(v) = 4\pi v^2 F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}$$

Middelverdier:

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$$

$$\langle v^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle = 3k_BT/m$$

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_BT/m} \simeq 1.73\sqrt{k_BT/m}$$

$$\langle v \rangle = \langle |\vec{v}| \rangle = \int_0^\infty v f(v)\,dv = 4\pi a^3 \int_0^\infty v^3 e^{-bv^2}\,dv$$

$$= 4\pi (b/\pi)^{3/2} \cdot i_3 = 4\pi (b/\pi)^{3/2}/2b^2 = 2/\sqrt{\pi b}$$

$$= \sqrt{8k_BT/\pi m} \approx 1.60\sqrt{k_BT/m}$$

Mest sannsynlige fart v_s når $f(v)$ er maksimal:

$$\frac{df}{dv} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dv}\left\{v^2 e^{-bv^2}\right\} = e^{-bv^2}\left\{2v - 2bv^3\right\} = 0$$

$$\Rightarrow v_s = \sqrt{1/b} = \sqrt{2k_BT/m} \approx 1.41\sqrt{k_BT/m}$$

Lydfarten:

$$v_{lyd} = \sqrt{\gamma k_BT/m} \quad ; \quad \gamma = C_p/C_v$$

Toatomige gasser (N_2, O_2 ...):

$$C_p = C_v + nR \quad ; \quad C_v = \frac{5}{2}nR$$

$\Rightarrow \gamma = 7/5$ for luft (ved normale temp.)

$$\Rightarrow v_{lyd} \approx 1.18\sqrt{k_BT/m}$$

Lyd er forplantning av tetthetsvariasjoner, dvs molekylenes bevegelse er involvert. Da må vi vel forvente at de ulike middelverdiene (v_{rms} og $\langle v\rangle$) og v_s alle er av samme størrelsesorden som lydfarten.