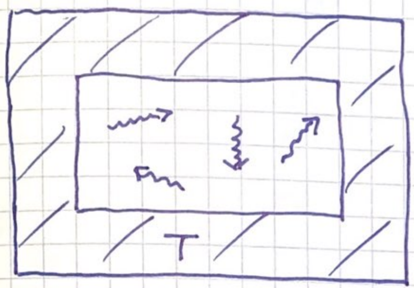
6.1, 9.9 Stråling

Akselererte ladninger emitterer elektromagnetiske (EM) bølger, i følge Maxwells ligninger.

Ser på et hulrom i termisk likevekt med veggene:

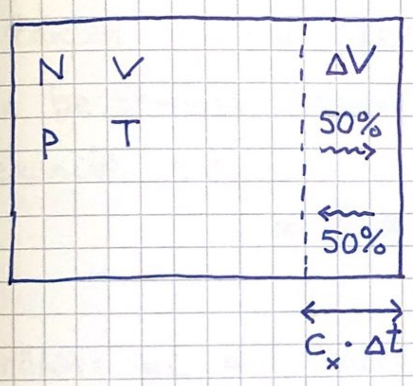


Hulrommet fylles med EM bølger og <u>energi</u>. Bølgene kolliderer med veggene og utøver et <u>trykk</u>.

Strålingsenergi i hulrommet: $U(T, V)$

Pr volumenhet: $u(T) = U/V$

Strålingstrykket:



N masseløse partikler (fotoner) i volumet V.
For relativistisk partikkel med energi E, masse m og impuls P:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (Pc)^2$$

Med $m = 0$: $E = Pc$.

Indre energi for N fotoner: $U = N\langle E \rangle$

Som for massive partikler (s. 43):

Impuls overført fra fotongassen til veggen på tid Δt:

$$\Delta P_x = \frac{1}{2} N \cdot \frac{A c_x \Delta t}{V} \cdot 2P_x \Rightarrow p = \frac{\langle \Delta P_x \rangle}{A \Delta t} = \frac{N}{V} \langle P_x c_x \rangle$$

$$\langle P_x c_x \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{P} \cdot \vec{c} \rangle = \frac{1}{3} \langle P \cdot c \rangle = \frac{1}{3} \langle E \rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{U}{N}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{3} u$$

PCH 4.18: $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$

Her: $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\{u(T)\cdot V\} = u(T)$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{3}\frac{\partial u(T)}{\partial T} = \frac{1}{3}\frac{du}{dT}$$

Dermed:

$$u = \frac{T}{3}\frac{du}{dT} - \frac{u}{3}$$

$$\Rightarrow 4u = T\frac{du}{dT}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T}$$

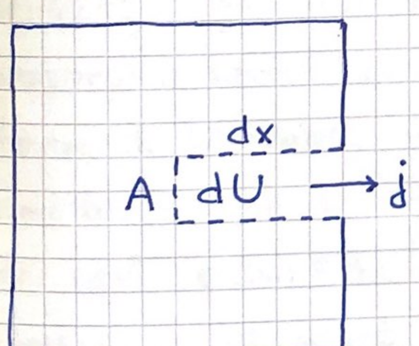
$$\Rightarrow \ln u = 4\ln T + \text{konst.} = \ln T^4 + \ln \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{u(T) = \alpha T^4}$$ Stefan-Boltzmanns lov

Konstanten α kan ikke fastlegges med kun termodynamikk. Kan bestemmes empirisk. Kvantemekanikk og statistisk mekanikk gir

$$\alpha = \pi^2 k_B^4 / 15\hbar^3 c^3 \qquad (\hbar = h/2\pi)$$

Stråling ut av hulrommet, gjennom et lite hull i veggen:



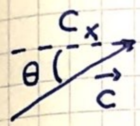
$dU = u\cdot dV = u\cdot A\cdot dx$

= strålingsenergi i volumet dV like innenfor hullet; 50 % på vei mot høyre

j = emittert effekt pr flateenhet

= —"— intensitet

$$\Rightarrow j = \frac{1}{2}\left\langle\frac{dU}{A\,dt}\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle\frac{u\,A\,dx}{A\,dt}\right\rangle = \frac{u}{2}\left\langle\frac{dx}{dt}\right\rangle = \frac{u}{2}\langle c_x\rangle$$



$c_x = c\cos\theta$; $0 \leq \theta \leq \pi/2$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\langle c_x \rangle = \frac{\iint c_x \, d\Omega}{\iint d\Omega} \quad ; \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{c \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}$$

Her er :

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = \Big|_0^{\pi/2} (-\cos\theta) = 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = \Big|_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \langle c_x \rangle = \frac{1}{2} c \qquad \Rightarrow \quad j = \frac{c}{4} \cdot u$$

$$\Rightarrow \quad j(T) = \sigma \cdot T^4$$

$$\text{med} \quad \sigma = \frac{c}{4}\alpha = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \ \frac{W}{m^2 K^4}$$

Dette er Stefan - Boltzmanns lov for et såkalt svart legeme, som absorberer all innkommende stråling, for alle bølgelengder. Dvs, legemets absorpsjonsevne er $a(\lambda) = 1$. Når legemet er i termisk likevekt, må like mye strålingsenergi emitteres, for alle bølgelengder. Dvs, emisjonsevnen er også $e(\lambda) = 1$. Hulrommet med det lille hullet i veggen er et svart legeme: Stråling inn gjennom hullet absorberes av veggene før den slipper ut igjen. Reelle materialer har $e < 1$. Eks: Asfalt: $e = 0.97$. Aluminiumsfolie: $e = 0.04$. Da er $j(T) = e \cdot \sigma T^4$ (LAB!)

Plancks strålingslov:

$$u(T) = \int_0^\infty d\nu \, \frac{du}{d\nu} \quad ; \quad u(T) = \int_0^\infty d\lambda \, \frac{du}{d\lambda}$$

$\frac{du}{d\nu}$ = energitetthet pr frekvensenhet ($J/m^3\,Hz$)

$\frac{du}{d\lambda}$ = —"— pr bølgelengdeenhet (J/m^4)

Frekvensfordelingen $du/d\nu$ kan utledes med

- Plancks kvantehypotese: EM stråling med frekvens ν har bare energiene $E_n = n \cdot h\nu$; $n = 0, 1, 2, \ldots$
  h = Plancks konstant = $6.62607015 \cdot 10^{-34}$ Js
- Hulrom med stående bølger, f. eks. kubisk (enklest!) med volum $V = L^3$
- Sannsynlighet for energi E_n ved temperatur T prop. med Boltzmannfaktoren, dvs $p_n \sim \exp(-E_n/k_BT)$.
  (Jf. Maxwells hastighetsfordeling, $F(v) \sim \exp(-E_k^{trans}/k_BT)$, $E_k^{trans} = mv^2/2$)

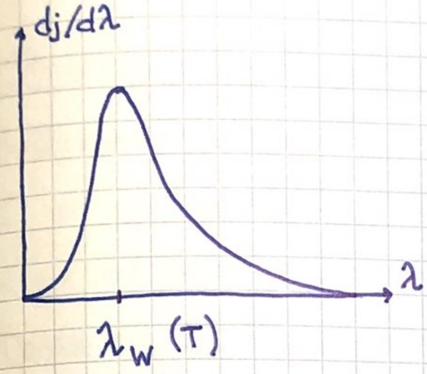
Resultat:

$$\frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_BT) - 1} \quad ; \quad \frac{dj}{d\nu} = \frac{c}{4} \frac{du}{d\nu}$$

$$\frac{du}{d\lambda} = 8\pi hc \cdot \frac{\lambda^{-5}}{\exp(hc/\lambda k_BT) - 1} \quad ; \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{c}{4} \frac{du}{d\lambda}$$

Har her brukt $c = \lambda \cdot \nu$, dvs $\nu = c/\lambda$, slik at

$$|du/d\lambda| = \frac{du}{d\nu} \cdot \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| = \frac{du}{d\nu} \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$



Maksimal $dj/d\lambda$ når

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dj}{d\lambda}\right) = 0$$

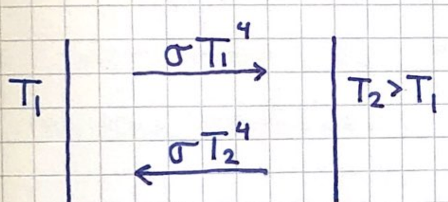
dvs for $\lambda_W(T) = 0.2014\, hc/k_B T$

Wiens forskyvningslov : $\lambda_W \approx \dfrac{2.898\ \mathrm{mm}\cdot\mathrm{K}}{T}$

Eks: Solas overflate, $T \approx 6000\,\mathrm{K}$

$\Rightarrow \lambda_W \approx (3\cdot 10^{-3}/6\cdot 10^{3})\,\mathrm{m} = 500\ \mathrm{nm}$ (grønt / blått)

Eks: Netto strålingsintensitet mellom parallelle plater med ulik temperatur



$$j = \sigma(T_2^4 - T_1^4)$$

Hvis $\Delta T = T_2 - T_1$ er liten $(\Delta T \ll T_1 \lesssim T_2 \approx \langle T\rangle)$, er j prop. med ΔT : $j \approx \sigma\cdot 4\langle T\rangle^3\cdot\Delta T$

Med f.eks. $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ og $T_2 = 310\,\mathrm{K}$: $\sigma(T_2^4 - T_1^4) = 64{,}37\ \mathrm{W/m^2}$

mens $4\sigma\langle T\rangle^3\Delta T = 64.35\ \mathrm{W/m^2}$

Nettostråling mellom jordas overflate og en mørk himmel:
Klarvær gir nattehimmelen en mye lavere effektiv temperatur enn overskyet vær, ned mot 250 – 270 K.
Gir stort varmetap og lav temperatur, spesielt i åpent landskap.

Statistisk mekanikk

Boltzmannfaktoren:

I et system med temp. T er sanns. for å finne en partikkel i en tilstand med energi E prop. med $\exp(-E/k_B T)$.

Dette er langt på vei begrunnet med Maxwells hastighetsfordeling.

En kort alternativ begrunnelse:

En gitt partikkel, i et isolert system med mange partikler og temp. T, kan være i to tilstander 1 og 2, med energi hhv E_1 og E_2. Alle de andre partiklene utgjør da "omgivelsene" eller "reservoaret", og har energi U_1 og U_2 slik at

$$E_1 + U_1 = E_2 + U_2$$

pga energibevarelse. Reservoarets entropi S avhenger av den ene partikkelens tilstand; forskjellen er (med TDI)

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{1}{T}(\Delta U + p\,\Delta V) \quad ; \quad \Delta U = -\Delta E$$

Her er typisk $p\,\Delta V \ll \Delta U$: Selv om $\Delta V \approx (1\,\text{Å})^3$ ved $p \approx 1$ atm, er arbeidsleddet bare ca $10^5 \cdot 10^{-30}$ J, dvs ca 10^{-6} eV, mens $\Delta E \sim 1$ eV eller mer i atomer.

Dermed:

$$\Delta S \approx (U_2 - U_1)/T = (E_1 - E_2)/T$$

Med Boltzmanns def. $S = k_B \ln \Omega$ samt $P_n \sim \Omega_n$:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\exp(S_2/k_B)}{\exp(S_1/k_B)} = \frac{\exp(-E_2/k_B T)}{\exp(-E_1/k_B T)}$$

dvs

$$P(E) \sim \exp(-E/k_B T)$$

Normering av sannsynlighet:

Med kontinuerlig energifunksjon $E(s)$:

$$dP(s) = C \cdot \exp(-E(s)/k_BT) \cdot ds$$

$=$ sanns. for E mellom $E(s)$ og $E(s+ds)$

$$\int dP(s) = 1$$ (integral over alle mulige verdier av s)

Middelverdi av fysisk størrelse $A(s)$:

$$\langle A \rangle = \int A(s)\,dP(s) = \int A(s)\,dP(s) \Big/ \int dP(s)$$

$$= \frac{\int A(s) \exp\{-E(s)/k_BT\}\,ds}{\int \exp\{-E(s)/k_BT\}\,ds}$$

Med diskrete energinivåer E_n:

$$P_n = \frac{1}{Z} e^{-E_n/k_BT}$$

$$\sum_n P_n = 1 \Rightarrow \frac{1}{Z} \sum_n e^{-E_n/k_BT} = 1$$

Partisjonsfunksjonen (Tilstandssummen): $Z = \sum_n e^{-E_n/k_BT}$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet (EPP):

Enhver frihetsgrad, dvs uavhengig variabel, som inngår kvadratisk i energifunksjonen bidrar med $\frac{1}{2}k_BT$ til indre energi pr partikkel.

Og vi har faktisk allerede bevist EPP, med Boltzmann-faktor og gaussintegraler på plass: Anta $E(s) = cs^2$ med vilkårlig konstant c. Da er (se s. 46):

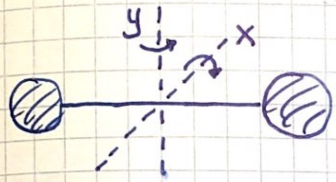
$$\underline{\langle E \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} cs^2 e^{-cs^2/k_BT}\,ds}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cs^2/k_BT}\,ds} = \frac{c\sqrt{\pi}/2(c/k_BT)^{3/2}}{\sqrt{\pi}/(c/k_BT)^{1/2}} = \underline{\frac{1}{2}k_BT}$$

C_V for gasser og krystaller:

Toatomig gass (N_2, O_2 ...):

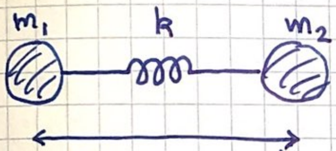
$$E_k^{trans} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \Rightarrow 3 \text{ kvadr. frihetsgr.}$$

$\Rightarrow$ bidrag $3 \cdot \frac{1}{2}k_BT$ til indre energi pr molekyl



$$E_k^{rot} = \frac{1}{2} I \left(\omega_x^2 + \omega_y^2\right); \quad I_x = I_y = I; \; I_z = 0$$

$\Rightarrow$ bidrag $2 \cdot \frac{1}{2}k_BT$ pr molekyl



$x(t) = x_0 \cos \omega t$

$$E^{vib} = E_k^{vib} + E_p^{vib} = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

[μ = redusert masse; $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$; $\omega = \sqrt{k/\mu}$]

$\Rightarrow$ bidrag $2 \cdot \frac{1}{2}k_BT$ pr molekyl

$$\left.\begin{array}{l} \text{EPP} \Rightarrow U = \frac{7}{2}Nk_BT \Rightarrow C_V/N = \frac{7}{2}k_B \\ \text{Exp}: \; C_V/N = \frac{5}{2}k_B \end{array}\right\} \text{!?}$$

Harmonisk oscillator med kvantemekanikk:

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Midlere vibrasjonsenergi pr molekyl ved temp. T:

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n P_n = \langle (n + 1/2)\hbar\omega \rangle = \langle n \rangle \hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$\langle n \rangle = \sum_n n P_n = \frac{1}{Z}\sum_n n\, e^{-E_n/k_BT} \quad \text{med} \quad Z = \sum_n e^{-E_n/k_BT}$$

Felles faktor $\exp(-\hbar\omega/2k_BT)$ kan forkortes.

Innfører $x = \exp(-\hbar\omega/k_BT)$ og $\tilde{Z} = \sqrt{x} \cdot Z$

$$\Rightarrow \tilde{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow \langle n \rangle = \frac{1}{Z}\sum_n n x^n = (1-x) \times \frac{d}{dx}\sum_n x^n = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x^{-1}-1}$$

$$= \left\{\exp(\hbar\omega/k_BT) - 1\right\}^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_BT) - 1} + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$\Rightarrow \frac{C_V^{vib}}{N} = \frac{d\langle E \rangle}{dT} = k_B \cdot \frac{(\hbar\omega/k_BT)^2 \cdot \exp(\hbar\omega/k_BT)}{\left[\exp(\hbar\omega/k_BT) - 1\right]^2}$$

$k_BT \gg \hbar\omega \quad \Rightarrow \quad C_V^{vib}/N \approx k_B$ i tråd med EPP

$k_BT \ll \hbar\omega \quad \Rightarrow \quad C_V^{vib}/N \approx 0$

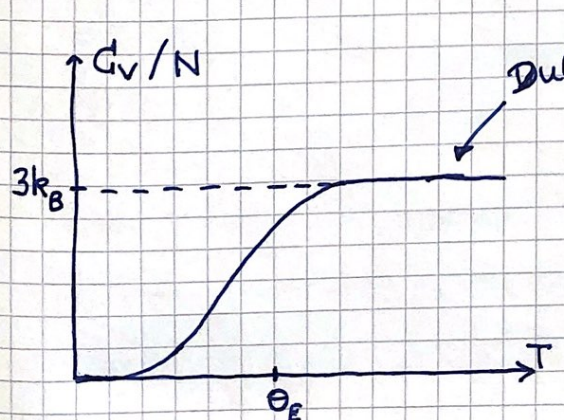
F. eks. N_2: $\hbar\omega \approx 0.29$ eV $\gg k_BT \approx 0.025$ eV ved 300 K

$\Rightarrow C_V/N = \frac{5}{2}k_B$ i tråd med exp.

Einsteins modell for C_V ($\approx C_p$) for krystaller:
Hvert atom tilsvarer 3 (pga 3 dimensjoner) uavh. harm. osc., hver med energi $E_n = n \cdot \hbar\omega$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.(*) Dermed:

$$C_V/N = 3k_B \cdot (\Theta_E/T)^2 \cdot \exp(\Theta_E/T) / \left[\exp(\Theta_E/T) - 1\right]^2$$

med Einstein-temp. $\Theta_E = \hbar\omega/k_B$ som varierer med type materiale.



(*) Nullpunktsenergien $\frac{1}{2}\hbar\omega$ var ukjent for Einstein i 1906, men den påvirker ikke C_V.