

10. Varmetransport og diffusjon

(89)

Temperaturforskjeller $\Rightarrow$ varmetransport

Konsentrasjonsforskjeller $\Rightarrow$ diffusjon

Mekanismer for varmeoverføring:

- Stråling [6.1, 9.9 ; s. 49-53 og 59 ; Lab 2]
- Konveksjon
- Varmeledning

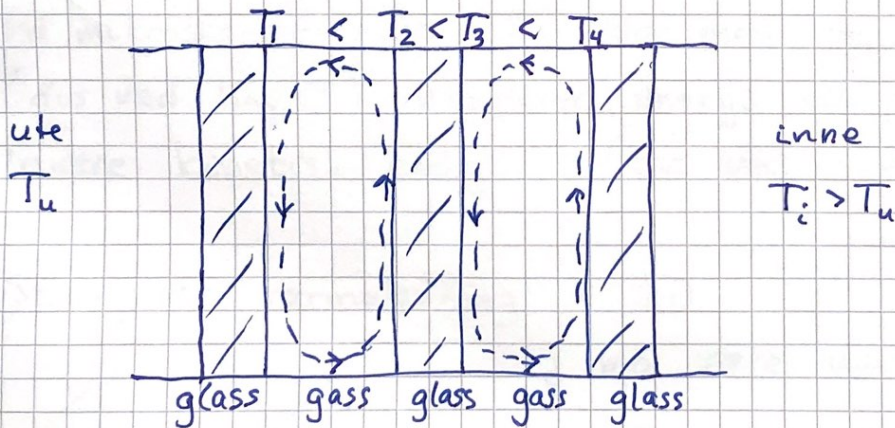
Konveksjon

Varmeoverføring pga strømming.

Eks 1: Vind øker varmetapet til, stadig ny, kald luft.

Eks 2: Isolerruter

Flerlags vindu med gass (f.eks. argon) mellom glassene.



Gass med høyere temp. og lavere tetthet ved 2 og 4 stiger opp mens gass med lavere temp. og høyere tetthet ved 1 og 3 faller ned. Nettoeffekt ved slik sirkulasjon er varmeoverføring, som grovt sett er prop. med temp.forskjellene $T_2 - T_1$ og $T_4 - T_3$.

Empiriske varmeovergangstall α :

(90)

$$j = \alpha \cdot \Delta T$$

$$[j] = \text{W/m}^2 \Rightarrow [\alpha] = \text{W/m}^2\text{K}$$

ΔT = temp. forskjell mellom en materialoverflate og et fluid (f.eks. luft ute eller inne)

Middelevrdier "over tid" :

$$\alpha_{\text{ute}} \approx 25 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\alpha_{\text{inne}} \approx 6 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Brukes f.eks. i byggebransjen.

10.3, 10.4 Varmeledning

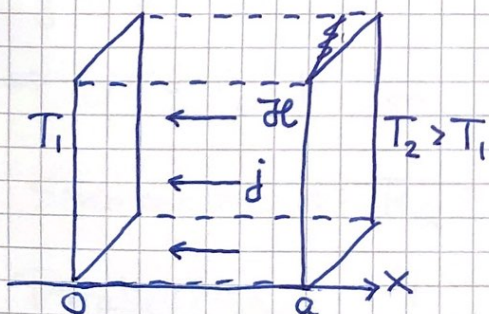
Empirisk : $\boxed{\vec{j} = -\kappa \nabla T}$ Fouriers lov

$\vec{j}$ = overført varme pr flate- og tidsenhet (W/m^2)

κ = materialets varmeledningsevne ($\text{W/K}\cdot\text{m}$)

På mikroskopisk nivå: Partikler med høy kinetisk energi (dvs ved høy T) overfører energi til partikler med lavere kinetisk energi (dvs ved lavere T).

Stasjonær varmelledning i 1D:



j må være uavhengig av x

$\Rightarrow \nabla T$ er konstant

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{a}$$

$$\Rightarrow j = -\frac{\kappa}{a} (T_2 - T_1)$$

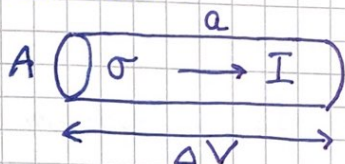
Noen tallverdier for κ (W/Km):

(91)

	Luft	"Glava"	Vann	Is	Glass	Tr�	Stål	Al	Diamant
κ	0.026	0.035	0.61	2.2	ca 1	ca 0.15	45	237	2000

Ohms lov: $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla V$
 Fourniers lov: $\vec{j} = -\kappa \nabla T$ } $\Rightarrow$ Tilsvarende ligninger for el.strøm og varmest m!

Elektrisk motstand:



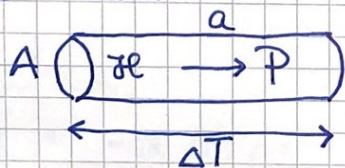
σ = el. ledningsevne

$j = I/A$ = strømtetthet; $I = \frac{dQ}{dt}$; Q = ladning

$j = \sigma E$ og $\Delta V = E \cdot a \Rightarrow j = \sigma \Delta V / a$

$\Rightarrow \Delta V = R \cdot I$ med $R = a / \sigma A$; $[R] = \frac{V}{A} (= \Omega)$

Varmemotstand:



κ = varmeledningsevne

$j = P/A$ = varmest rmetetthet; $P = \frac{dQ}{dt}$; Q = varme

$j = \kappa \Delta T / a$

$\Rightarrow \Delta T = R_Q \cdot P$ med varmemotstand $R_Q = a / \kappa A$; $[R_Q] = K/W$

Seriekobling: $R_Q = R_Q^{(1)} + R_Q^{(2)} + \dots$

Parallellkobling: $\frac{1}{R_Q} = \frac{1}{R_Q^{(1)}} + \frac{1}{R_Q^{(2)}} + \dots$

(evt $G_Q = G_Q^{(1)} + G_Q^{(2)} + \dots$; $G_Q = \kappa A / a$ = varmekonduktans)

Eks: Yttervegg; reisverk

-18°C	tre	glava	tre	+22°C
ute	3cm	20cm	3cm	inne

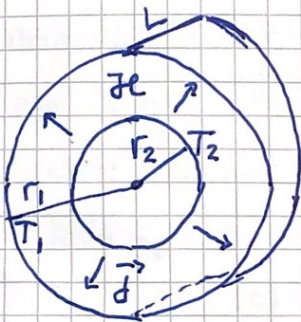
Seriekobling: $R_Q = [2 \cdot 0.03 / 0.15 \cdot 1 + 0.20 / 0.035 \cdot 1] \frac{K}{W} = 6.1 \frac{K}{W}$

for $1m^2$ vegg $\Rightarrow P = \Delta T / R_Q = 6.5 W$ pr m^2 vegg

$\Delta T_{glava} = P \cdot R_Q^{glava} = 6.54 W \cdot 5.71 K/W = 37 K$

$\Delta T_{tre} = 3 K$

Sylindersymmetri: [Øv. 10 nr 5]



$T(r_1) = T_1$; $T(r_2) = T_2$

$\nabla T = \hat{r} dT/dr$; $\vec{j} = \hat{r} j(r)$

Ved stasjonær varmeledning: Like mye varme pr tidsenhet gjennom enhver sylinderflate med $r_2 < r < r_1$, lengde L og dermed areal $A(r) = 2\pi r \cdot L$

$\Rightarrow j(r) = P/A$; $P = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ og $j(r) = -\kappa dT/dr$

$\Rightarrow P/2\pi r L = -\kappa dT/dr \Rightarrow \frac{P}{L} \cdot \frac{dr}{r} = -2\pi \kappa dT$

$\Rightarrow \frac{P}{L} = \frac{2\pi \kappa (T_2 - T_1)}{\ln(r_1/r_2)}$ = radiell varmeeffekt pr lengdeenhet

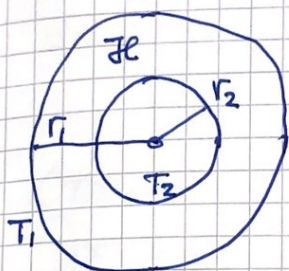
Eks: Sylinderson, $L = 180 cm$, $A = 1.8 m^2$, heldekkende 2 cm tykt "neoprene foam" med $\kappa = 0.03 W/K \cdot m$ i sjøen om vinteren. Hva er varmetapet?

Løsn: Antar radiell varmestøm. $r_2 = A/2\pi L = (2\pi)^{-1} m$.

$T_2 = 35^\circ C$, $T_1 = 0^\circ C$, $r_1 = r_2 + 2 cm$

$\Rightarrow P = \frac{2\pi \kappa L (T_2 - T_1)}{\ln(r_1/r_2)} = \underline{100 W} \approx$ produsert P pga stoffskifte (person i ro)

Kulesymmetri :



Konstant varmeeffekt $P = dQ/dt$
gjennom kuleskall med $r_2 < r < r_1$ og
 $A(r) = 4\pi r^2$

(93)

$$\Rightarrow j = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2} = -k \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow P = \frac{4\pi k (T_2 - T_1)}{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}$$

Newtons avkjølingslov :

Hvordan avkjøles et system via varmeledning til et omgivende reservoar med konst. temp. T_0 ? Anta varmemotstand R_Q mellom system og reservoar, men ingen indre varmemotstand i systemet; dermed samme $T(t)$ i hele systemet. Da har vi :

$$\Delta T(t) = T(t) - T_0 = R_Q \cdot P(t) ; P(t) = -\frac{dU}{dt} = -C \frac{dT}{dt}$$

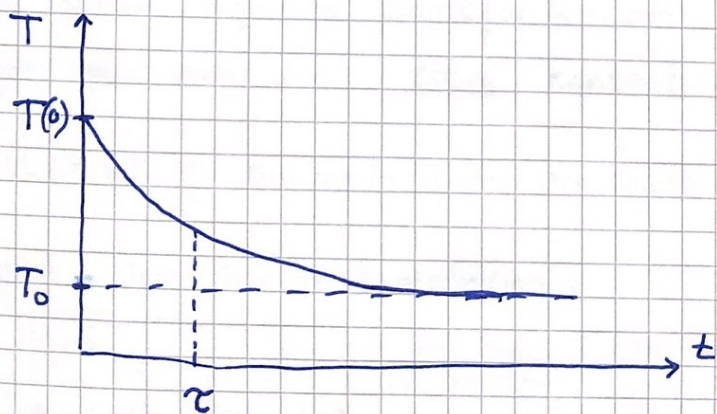
Her er $dT/dt = d\Delta T/dt$ slik at $d\Delta T/\Delta T = -dt/R_Q C$
med løsning

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) e^{-t/\tau} ; \tau = R_Q C$$

1D varmeleder : $R_Q = L/kA$

2D, sylinderskall : $R_Q = \ln(r_1/r_2)/2\pi k L$

3D, kuleskall : $R_Q = (1/r_2 - 1/r_1)/4\pi k$



Varmeledningsligningen

(94)

Energibevarelse uttrykkes ved kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad ; \quad u = \text{energi pr volumenhett}$$

(Tilsvarende for masse, ladning og sannsynlighet, jf. TFY4163, FY1003 og TFY4215.)

For et lite volum V :

$$Q_v = dU/dT = V du/dT \Rightarrow du = c \cdot dT \quad ; \quad c = Q_v/V$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\text{Fouriers lov: } \vec{j} = -\kappa \nabla T \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$$

Vi antar homogent stoff med konstant κ

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\kappa \nabla^2 T \quad ; \quad \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T}$$

Varmeledningslign.

$$D_T = \kappa/c = \text{termisk diffusivitet} \quad (\text{m}^2/\text{s})$$

$$c = \text{varmekapasitet pr volumenhett} \quad (\text{J}/\text{K m}^3)$$

$$\kappa = \text{varmeledningsevne} \quad (\text{W}/\text{K m})$$

10.6, 10.8 Diffusjon

Transport av partikler pga konsentrasjonsforskjeller.

Ikke strømming pga trykkforskjeller: Andre typer partikler sørger for konstant total konsentrasjon.

$$\Rightarrow n(\vec{r}, t) = \text{konsentrasjon av gitt type partikler}$$

Empirisk som for varmeledning:

$$\boxed{\vec{j} = -D \nabla n}$$

Ficks lov

$\vec{j}$ = netto antall partikler av gitt type gjennom flate
pr tids- og flateenhet ($1/m^2s$)

n = antall slike partikler pr volumenhet ($1/m^3$)

D = diffusjonskonstanten (m^2/s)

Kontinuitetslign. for partikkelbevarelse:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

som kombinert med Ficks lov gir $\partial n / \partial t = \nabla \cdot (D \nabla n)$, og
som med homogene omgivelser, dvs konstant D , gir

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

Diffusjonsligningen

Noen tallverdier for D , i cm^2/s ved $20^\circ C$ og 1 atm:

• I luft: $D_{CO_2} = 0.16$, $D_{H_2O} = 0.24$

I vann: $D_{CO_2} = 1.7 \cdot 10^{-5}$

• Ladbingsbærere i silisium (Si; en halvleder):

Elektroner: $D_n \approx 39$; Hull: $D_p \approx 12$

Eksempler, så mange vi rekker!

(96)

Eks 1: Skalering

En potet som veier 27 g kokes på 10 minutter.

Hvor lang tid trenger en som veier 66 g?

Løsn 1: Ligningen $\partial T / \partial t = D_T \nabla^2 T$ er uendret hvis tid og lengder skaleres med faktorene α^2 og α :

$$\frac{\partial T}{\partial (\alpha^2 t)} = D_T \left(\frac{\nabla}{\alpha} \right)^2 T \iff \frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Her skaleres lengder med $\alpha = (66/27)^{1/3} = 1.347$. Da øker koketida til $\alpha^2 \cdot 10 \text{ min.} \approx 18 \text{ min.}$

Eks 2: Is på innsjø

Anta konstant temp. 0°C i vannet og konstant ΔT lavere i lufta. Anta varmeledning kun gjennom isen, Hvordan øker istykkelsen med tida?

Løsn 2: Økning i tykkelse fra z til $z+dz$ frigjør varmen

$$dQ = l_{sm} \cdot dm = l_{sm} \cdot \rho \cdot A \cdot dz$$

på et areal A , når l_{sm} = smeltevarme pr masseenheter og ρ = masse pr volumenhet. Fouriers lov:

$$j = \frac{dQ}{dt \cdot A} = \kappa \frac{\Delta T}{z} \Rightarrow \frac{l_{sm} \rho dz}{dt} = \frac{\kappa \Delta T}{z} \Rightarrow z dz = \frac{\kappa \Delta T}{l_{sm} \rho} dt$$

$$\Rightarrow z(t) = \sqrt{2\kappa \Delta T / l_{sm} \rho} \cdot \sqrt{t}$$

Med $\kappa = 2.2 \text{ W/Km}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ og $l_{sm} = 6 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \cdot 55.6 \frac{\text{mol}}{\text{kg}} = 334 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

er $z(t; \Delta T) = 0.1148 \cdot \sqrt{t \Delta T} \text{ mm}$, med t og ΔT i s og K.

Ei natt (12 timer) med 10 kuldegrader gir $z = 75 \text{ mm}$.

Eks 3: Temperatursvingninger i bakken.

Anta harmoniske svingninger på overflaten, med periode et år, eventuelt et døgn, dvs

$$T(0,t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$$

med sommer ved $t=0$ og vinter ved $t=\pi/\omega$.

Varmeledning ligningen for $T(z,t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Er identisk med Schrödinger ligningen i 1D for fri partikkel i konstant potensial $V=0$,

$$i\hbar \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

dersom $D_T = i\hbar/2m$, dvs $m = i\hbar/2D_T$.

Da kjenner vi løsningen, en plan bølge:

$$T(z,t) = T_0 + T_1 e^{ikz} e^{-i\omega t}$$

Ser at $\text{Re} T$ oppfyller grensebetingelsen i $z=0$.

Innsetting gir $-i\omega = D_T \cdot (ik)^2$, dvs

$$k = \sqrt{i\omega/D_T} = \sqrt{\omega/D_T} \cdot (1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2})$$

da $\sqrt{i} = \exp(i\pi/4) = (1+i)/\sqrt{2}$. Dermed:

$$\underline{T(z,t) = T_0 + T_1 e^{-\sqrt{\omega/2D_T} z} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2D_T}} z - \omega t\right)}$$

som er en dempet bølge nedover i bakken.

Anta $D_T = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ (ok for leire/sand/grus - blanding)

Periode 1 år: $\omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$; $\sqrt{2D_T/\omega} = 2 \text{ m}$. Da er

$T(z,t)$ i motfase med $T(0,t)$ ved $z = 2\pi \text{ m} = 6.3 \text{ m}$

under overflaten, dvs kaldest om sommeren. Men små

variasjoner så dypt, bare $e^{-\pi} \approx 4\%$ av $2T_1$ (på overflaten).

Periode 1 døgn: $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$; $\sqrt{2D_T/\omega} = 10 \text{ cm}$. Dvs

variasjoner bare ned til 20-30 cm under overflaten.

Eks 4: Diffusjon med lokal kilde.

Anta N molekyler nær origo ved $t=0$. Hvor raskt sprer molekylene seg utover?

Løsn 4: Vi kan spørre oss om problemet har en karakteristisk lengde, etter det har gått en viss tid, evt. en karakteristisk tid, i en viss avstand fra kilden.

Minner om RC-krets (uten spenningskilde):

$$-RI - Q/C = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \Rightarrow RC \text{ er karakteristisk}$$

tid i RC-kretsen. Evt. RL-krets: $-RI - LdI/dt = 0$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{L}{R} \frac{d^2Q}{dt^2} \Rightarrow \frac{L}{R} \text{ er kar. tid i RL-kretsen.}$$

Dermed, for diffusjon:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n \Rightarrow \sqrt{D \cdot t} \text{ er en karakteristisk lengde:}$$

Etter en tid t har en "betydelig andel" av molekylene diffundert en lengde av størrelsesorden $\sqrt{D \cdot t}$.

For små molekyler i luft er $D \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (s.95)

$$\Rightarrow \sqrt{D \cdot t} \approx 3 \text{ cm etter 1 minutt; } \approx 27 \text{ cm etter 1 time}$$

Med $n(\vec{r}, 0) = N \cdot \delta(\vec{r})$ er den eksakte løsningen

$$n(\vec{r}, t) = n(r, t) = N \cdot (4\pi Dt)^{-3/2} \cdot \exp(-r^2/4Dt)$$

(som du kan vise ved innsetting og bruk av

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (2/r)\partial/\partial r \text{ ved kulesymmetri})$$

Midlere diffusjonslengde: $d(t) = \sqrt{\langle r^2(t) \rangle}$ (RMS-verdi)

$$\langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{N} \int r^2 n(r, t) d^3r = \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty r^2 n(r, t) r^2 dr = 6Dt$$

[Se s.46: Gaussintegral $I_4/2$ med $b=1/4Dt$]

$$\Rightarrow d(t) = \sqrt{6Dt} \approx 8 \text{ cm og } 66 \text{ cm etter hhv 1 min og 1 time}$$

Eks 5: Virrevandring. (Random walk)

99

Vi beskriver diffusjon som molekylers tilfeldige bevegelse, steg for steg med lik lengde $|\Delta \vec{r}_j| = a$ og konstant fart $|\vec{v}_j| = a/\Delta t$, men i tilfeldig retning

$$(*) \Rightarrow \langle \vec{r}^2(t) \rangle = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \langle \Delta \vec{r}_j \cdot \Delta \vec{r}_k \rangle = \sum_{j=1}^M \langle \Delta \vec{r}_j^2 \rangle = a^2 \cdot M$$

ettersom $\langle \Delta \vec{r}_j \cdot \Delta \vec{r}_{k \neq j} \rangle = 0$ pga at alle steg er i tilfeldige retninger. Etter M steg er $t = M \cdot \Delta t$, dvs

$$\langle r^2(t) \rangle = a^2 \cdot \frac{t}{\Delta t} = a \cdot \frac{a}{\Delta t} \cdot t = a \cdot v \cdot t$$

I realiteten er selvsagt a og v middelværddier:

$\langle a \rangle = \lambda$ = midlere fri veilengde

$\langle v \rangle$ = midlere partikkelfart, prop. med $\sqrt{k_B T / m}$
i gasser (jf. kinetisk gassteori)

Sammenligning med Eks 4 viser at

D er prop. med $\lambda \cdot \langle v \rangle$

$$(*) \quad \vec{r}(t) = \sum_{j=1}^M \Delta \vec{r}_j = \sum_{k=1}^M \Delta \vec{r}_k \quad \text{etter } M \text{ steg}$$