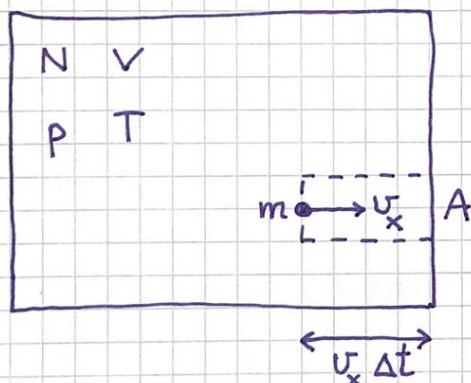


9.1 Antagelser

- Lav tetthet, $V_{\text{molekyl}} \ll V/N = \text{tilgjengelig volum pr molekyl}$. OK ved normale betingelser:
 $V_{\text{molekyl}} \approx (3\text{\AA})^3$
 $V/N = k_B T/p \approx (1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300/10^5) \text{ m}^3 \approx (35\text{\AA})^3$
- Klassisk mekanikk og elastiske kollisjoner mot glatte vegger, slik at impulskomponentene tangentielt til veggen er bevart i en kollisjon
- Isotrope forhold: ingen foretrukne retninger

9.3 Trykk i ideell gass og mikroskopisk tolkning av T

$$N2: F_x = \Delta P_x / \Delta t \Rightarrow p = F_x / A = \Delta P_x / A \Delta t$$

= trykk mot veggen

Impuls overført til A i løpet av Δt :

$$\Delta P_x = \frac{1}{2} N \cdot \frac{A u_x \Delta t}{V} \cdot 2 m u_x$$

↑
antall med
 $u_x > 0$

↑
andel som
treffer A
i løpet av Δt

↑
overført impuls
pr molekyl

$$\Rightarrow p = \frac{N}{V} \cdot m \overline{v_x^2}$$

(51)

Molekylene i gassen har en fordeling av hastigheter

$\Rightarrow$ vi må bruke middelverdien $\langle v_x^2 \rangle$

Isotropi: $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$

$$\Rightarrow p = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{N}{V} \cdot \frac{2}{3} \langle E_k^{\text{trans}} \rangle$$

Midlere translasjonsenergi: $\langle E_k^{\text{trans}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$

Ideell gass: $p = \frac{N}{V} \cdot k_B T \Rightarrow \langle E_k^{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

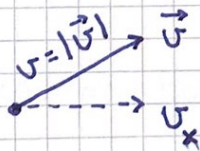
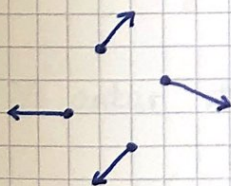
$\Rightarrow T$ er et mål på molekylenees midlere translasjonsenergi

Eks: C_V for edelgasser. Atomære gasser

$$\Rightarrow E_k = E_k^{\text{trans}} \Rightarrow U = N \cdot \langle E_k^{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} n R, \text{ i tråd med exp. verdier}$$

9.2, 9.4, 9.5 Maxwells hastighetsfordeling



Fartsfordelingen:

$f(v) dv$ = andel av molekylene med fart mellom v og $v+dv$
 = sannsynligheten for at et gitt molekyl har fart mellom v og $v+dv$

Komponentfordelingen:

(52)

$g(v_x) dv_x$ = sanns. for at et gitt molekyl har en komponent av $\vec{v}$ i x-retning mellom v_x og $v_x + dv_x$

Hastighetsfordelingen:

$F(\vec{v}) d^3v$ = sanns. for at et gitt molekyl har hastighet innenfor et volumelement d^3v omkring $\vec{v}$

Alle sanns. fordelingene må være normert:

$$\int_0^\infty f(v) dv = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^\infty g(v_x) dv_x = 1 \quad ; \quad \int F(\vec{v}) d^3v = 1$$

Isotropi $\Rightarrow F(\vec{v}) = F(v) \Rightarrow$ bruker kulekoordinater:
 $d^3v = v^2 dv d\Omega = v^2 dv \sin\theta d\theta d\phi$

$F(v)$ integrert over alle retninger må resultere i $f(v)$

$$\Rightarrow f(v) dv = \iint_{\Omega} F(v) v^2 dv d\Omega = 4\pi F(v) v^2 dv$$

Middelverdier:

$$\langle v^n \rangle = \int_0^\infty v^n f(v) dv \quad ; \quad \langle v_x^n \rangle = \int_{-\infty}^\infty v_x^n g(v_x) dv_x$$

Vi antar statistisk uavhengige komponenter:

$$F(v) d^3v = g(v_x) dv_x \cdot g(v_y) dv_y \cdot g(v_z) dv_z$$

$$\Rightarrow F(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) \cdot g(v_z) \quad ; \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Det eneste som fungerer er "gauss-funksjoner":

$$g(v_x) = a e^{-b v_x^2} \quad \text{dvs} \quad F(v) = a^3 e^{-b v^2} \quad (\text{isotrop, som forutsatt})$$

Normering samt $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}$ fastlegger a og b: (53)

$$\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-b v_x^2} dv_x = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 a e^{-b v_x^2} dv_x = \frac{k_B T}{m}$$

Gaussintegraler (Appendix B):

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b x^2} dx = ?$$

$$\begin{aligned} I_0^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b y^2} dy = \iint e^{-b r^2} dA \quad (dA = r d\phi dr) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr r e^{-b r^2} = 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2b} e^{-b r^2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{b} \Rightarrow \boxed{I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{b}}} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-b x^2} dx = -\frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b x^2} dx = -\frac{d}{db} \sqrt{\frac{\pi}{b}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2 b^{3/2}} \quad (\text{osv})$$

$$I_{2n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-b x^2} dx = 0 \quad \text{pga antisymm. integrand} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$i_n = \int_0^{\infty} x^n e^{-b x^2} dx$$

$$i_{2n} = \frac{1}{2} I_{2n} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

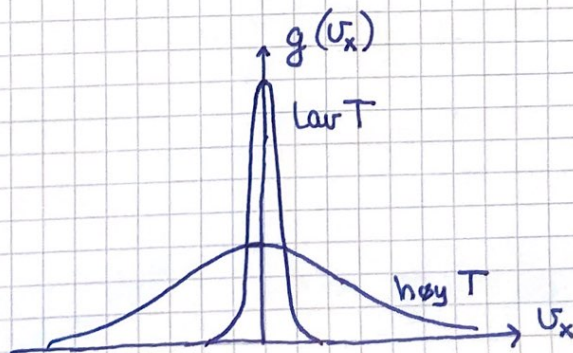
$$i_1 = \int_0^{\infty} x e^{-b x^2} dx = \frac{1}{2b} \quad ; \quad i_3 = -\frac{d}{db} i_1 = \frac{1}{2b^2} \quad (\text{osv})$$

$$\Rightarrow a \cdot \sqrt{\pi/b} = 1 \quad \text{og} \quad a \sqrt{\pi}/2b^{3/2} = k_B T/m$$

$$\Rightarrow b = m/2k_B T \quad \text{og} \quad a = \sqrt{m/2\pi k_B T}$$

Komponentfordelingen:

$$g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} e^{-m v_x^2 / 2k_B T}$$



Hastighetsfordelingen:

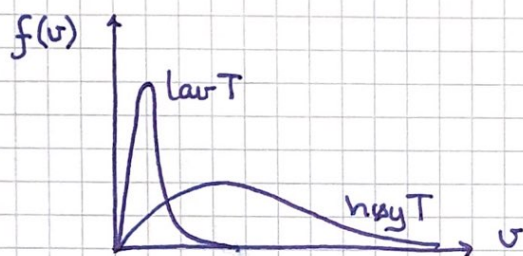
(54)

$$F(v) = g(v_x)g(v_y)g(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T}$$



Fartsfordelingen:

$$f(v) = 4\pi v^2 F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_B T}$$



Middelverdier:

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \vec{v} \rangle = 0$$

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3 k_B T / m$$

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 k_B T / m} \approx 1.73 \sqrt{k_B T / m}$$

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \langle |\vec{v}| \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = 4\pi \int_0^\infty v^3 F(v) dv \\ &= \sqrt{8 k_B T / \pi m} \approx 1.60 \sqrt{k_B T / m} \quad (\text{jf i s. 53}) \end{aligned}$$

Mest sannsynlige fart v_s :

$$\frac{df}{dv} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dv} \{ v^2 e^{-bv^2} \} = 0 \Rightarrow v_s = \sqrt{1/b} = \sqrt{2 k_B T / m} \approx 1.41 \sqrt{k_B T / m}$$