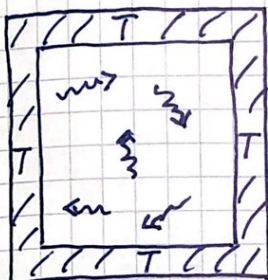


6.1, 9.9 (9.6) Stråling

(63)

Fra Maxwells ligninger følger det at akselererte ladninger emitterer elektromagnetiske (EM) bølger.

Ser på hulrom i termisk likevekt med veggene:



Hulrommet fylles med EM bølger, og dermed energi. Bølgene (fotonene) kolliderer med veggene og utøver dermed et trykk.

Strålingsenergi i hulrommet: $U(T, V)$

Pr volumenhet: $u(T) = U/V$

Strålingstrykket:



N masseløse partikler (fotoner) i volumet V .

For relativistiske partikler med energi E , masse m , impuls $\vec{P}$:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (Pc)^2$$

Fotoner, $m=0$: $E = Pc$

Indre energi for N fotoner: $U = N \cdot \langle E \rangle$

Som for massive partikler (s. 50-51):

$$\Delta P_x = \frac{1}{2} N \cdot \frac{A c_x \Delta t}{V} \cdot 2 P_x \Rightarrow p = \frac{\langle \Delta P_x \rangle}{A \Delta t} = \frac{N}{V} \cdot \langle P_x c_x \rangle$$

$$\langle P_x c_x \rangle = \frac{1}{3} \langle \vec{P} \cdot \vec{c} \rangle = \frac{1}{3} \langle Pc \rangle = \frac{1}{3} \langle E \rangle = \frac{1}{3} \frac{U}{N}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{1}{3} u$$

PCH 4.18: $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$

(64)

Her er: $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V} \{u(T) \cdot V\} = u(T)$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{3} \frac{\partial u(T)}{\partial T} = \frac{1}{3} \frac{du}{dT}$$

$$\Rightarrow u = \frac{T}{3} \frac{du}{dT} - \frac{u}{3} \quad \Rightarrow \quad 4u = T \frac{du}{dT}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \ln u = 4 \ln T + \text{konst} = \ln T^4 + \ln \alpha$$

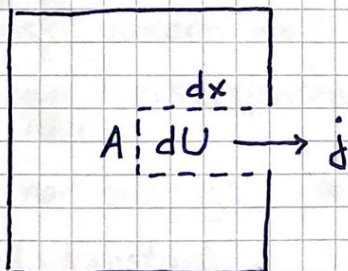
$$\Rightarrow \boxed{u(T) = \alpha T^4} \quad \text{Stefan-Boltzmanns lov}$$

Med QM og Stat Mek (utledes ikke her):

$$\alpha = \pi^2 k_B^4 / 15 \hbar^3 c^3 \quad (\hbar = h/2\pi \approx 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js})$$

Termodynamikk (k_B), kvantemekanikk ($\hbar$) og relativitetsteori (c) i skjønn forening!

Stråling ut gjennom lite hull i vegg (9.6):



$dU = u \cdot dV = u \cdot A \cdot dx$
 = strålingsenergi i volumet dV ,
 hvorav 50% er på vei
mot hullet

Strålingsintensitet: j = emittert effekt pr flateenhet (W/m^2)

$$\Rightarrow j = \frac{1}{2} \left\langle \frac{dU}{A dt} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{u A dx}{A dt} \right\rangle = \frac{u}{2} \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle = \frac{u}{2} \langle c_x \rangle$$

$$c_x = c \cdot \cos \theta$$

$$\langle c_x \rangle = \iint c_x d\Omega / \iint d\Omega \quad (d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi)$$

$$= c \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta / \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta$$

$$= c \cdot \frac{1}{2} / 1 = \underline{c/2}$$

Dermed: $j = \frac{c}{4} u$

(65)

dvs: $j(T) = \sigma T^4$ Stefan-Boltzmanns lov

med $\sigma = \frac{c}{4} \alpha = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$

Gjelder for et svart legeme:

Absorberer all innkommende stråling, dvs absorpsjonseunen er

$$a(\lambda) = 1 \quad \text{for alle bølglengder } \lambda$$

Siden legemet er i termisk likevekt, må like mye strålingsenergi emitteres, dvs emisjonseunen er

$$e(\lambda) = 1 \quad \text{for alle bølglengder } \lambda$$

Hulrommet med et lite hull i veggen er da en realisering av et svart legeme: All stråling inn gjennom hullet absorberes (i beholderveggene).

Reelle materialer: $a < 1$ og $e < 1$, og begge vil typisk variere med bølglengden. Da er refleksjonseunen r og/eller transmisjonseunen t større enn null.

Vi har selvsagt $a + r + t = 1$ (for alle λ).

Med konstant e blir

$$j(T) = e \cdot \sigma T^4$$

Eks:

Asfalt $e \approx 0.90$

Tekstiler $e = 0.60 - 0.90$

Polert metall $e \approx 0.05$; $r \approx 0.95$ (speil)

Plancks strålingslov:

(66)

$$u(T) = \int_0^{\infty} d\nu \frac{du}{d\nu} \quad ; \quad u(T) = \int_0^{\infty} d\lambda \frac{du}{d\lambda}$$

$$\frac{du}{d\nu} = \text{energitetthet pr frekvensenhet} \left(\frac{\text{J/m}^3}{\text{Hz}} \right)$$

$$\frac{du}{d\lambda} = \text{---"--- pr bølglengdeenhet} \left(\frac{\text{J/m}^3}{\text{m}} \right)$$

Siden $\nu = c/\lambda$:

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{du}{d\nu} \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{du}{d\nu} \cdot \frac{c}{\lambda^2} \quad ; \quad \text{dvs} \quad \left| \frac{du}{d\lambda} \right| = \frac{du}{d\nu} \cdot \frac{c}{\lambda^2}$$

Frekvensfordelingen $du/d\nu$ kan utledes slik:

- Anta kubisk hulrom (enklost) med stående bølger
- Plancks kvantehypotese: Stråling med frekvens ν har kvantisert energi $E_n = n \cdot h\nu$; $n = 0, 1, 2, \dots$ med $h = 6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ (Plancks konstant)

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n p_n \quad \text{med} \quad p_n = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_n} \quad ; \quad \beta = 1/k_B T$$

Blir som harmonisk oscillator (s 58-59), dvs

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad \text{pr svingemode}$$

- Antall svingemoder pr frekvensenhet beregnes med en "geometrisk opptelling" av stående bølger som oppfyller Maxwells ligninger (i vakuum) inklusive grensebetingelser for elektrisk og magnetisk felt på hulrommets vegger. Antall svingemoder pr frekvens- og volumenhet er: $8\pi\nu^2/c^3$

$$\text{Dermed:} \quad \frac{du}{d\nu} = \frac{8\pi h \nu^3 / c^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad ; \quad \frac{dj}{d\nu} = \frac{c}{4} \frac{du}{d\nu}$$

$$(\Rightarrow u(T) = (k_B T)^4 \cdot \pi^2 / 15 h^3 c^3)$$

Bølglengdefordelingen er dermed:

(67)

$$\frac{du}{d\lambda} = \frac{8\pi hc/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \quad ; \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{c}{4} \frac{du}{d\lambda}$$

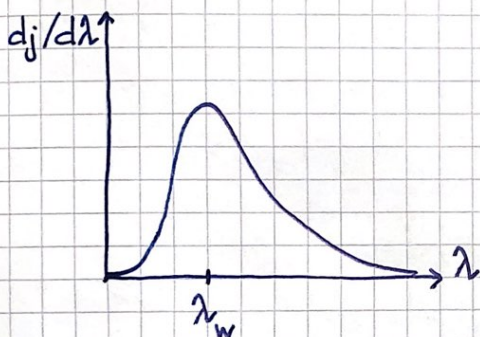
Klassisk grense: $k_B T \gg h\nu$

Da er $\langle E \rangle \approx k_B T$, i samsvar med EPP siden

$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$, dvs to kvadratiske bidrag.

Og $du/d\nu \sim \nu^2$, som observert for lave frekvenser.

Wiens forskyvningslov:



Maksimal $dj/d\lambda$ når

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dj}{d\lambda} \right) = 0, \text{ som tilsvarende}$$

$$\lambda_w = \frac{0.2014 hc}{k_B T} \approx \frac{2.898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T}$$

Eks: Solas overflate: 6000 K $\Rightarrow \lambda_w \approx 500 \text{ nm}$ (blågrønt)

Din — " — : ca 300 K $\Rightarrow \lambda_w \approx 10 \mu\text{m}$ (IR)

Eks: Netto strålingsintensitet mellom parallelle plater

$$\begin{array}{c} \sigma T_1^4 \uparrow \quad \downarrow \sigma T_2^4 \\ \hline T_1 \quad T_2 \end{array} \quad T_2 > T_1 \quad j = \sigma (T_2^4 - T_1^4)$$

Hvis $\Delta T \ll T_1 \approx T_2 \approx \langle T \rangle$: $j \approx 4\sigma \langle T \rangle^3 \Delta T$ (Vis dette)

Eks: Glatte veier med varmegrader

Klar, mørk himmel: $T \approx 260 \text{ K}$

