

10. Varmetransport og diffusjon

(85)

Temperaturforskjeller (-gradienter) $\Rightarrow$ Varmetransport
Konsentrasjonsforskjeller (-) $\Rightarrow$ Diffusjon (Feks. osmose)

Mekanismer for varmeoverføring:

- Stråling [s. 63-67 ; Lab 1]
- Konveksjon
- Varmeledning

Konveksjon: Varmeoverføring pga strømming.

Naturlig (fri) konveksjon:

Strømming av fluidet (gass eller væske) pga tetthetsgradienter, som oppstår pga temperaturgradienter.

Eks: Oppdrift av varm luft, nedfall av kald luft.

Hvis trykket er konstant, er tettheten $\rho = m/V = p/RT$ omvendt prop. med temperaturen. I en væske oppstår typisk en sirkulasjon. Netto resultat er varmeoverføring.

Tvingen konveksjon:

Ekstern kraft (feks. vifte, vind), forårsaket av noe annet enn interne temperaturgradienter, framtvinger strømming av fluidet. Gir varmetransport hvis fluidet strømmer til områder med en annen temperatur enn der det kom fra.

Kombinert masse- og varmestrøm blir fort komplisert.

Forenkles med empiriske varmeovergangstall α som uttrykker proporsjonalitet mellom temperaturforskjell og varmestrøm.

Dvs: $j = \alpha \cdot \Delta T$

(86)

der j = overført varmeeffekt pr flateenhet (W/m^2)

ΔT = temp.forskjellen mellom en materialoverflate og det omgivende fluidet (f.eks. Luft eller vann)

Type konveksjon	Fluid	α ; typiske verdier (W/m^2K)
Naturlig	Gass	5 - 25
— " —	Væske	50 - 1000
Tvingen	Gass	25 - 250
— " —	Væske	500 - 10 000

10.3, 10.4 Varmedledning

Empirisk:

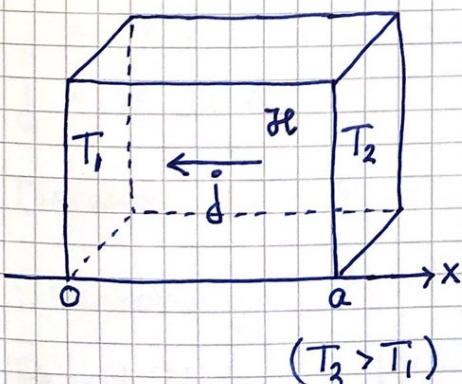
$$\vec{j} = -\kappa \nabla T$$

Fouriers Lov

κ = materialets varmedledningsevne (W/Km)

Mikroskopisk: Partikler med høy kinetisk energi (høy T) overfører energi til partikler med lavere kinetisk energi (lav T).

Stasjonær varmedledning i 1D: Da er j uavhengig av x .
(Hvis ikke blir T tidsavhengig)



Dermed: ∇T er konstant

$$\Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{a}$$

$$\Rightarrow j = -\frac{\kappa}{a} (T_2 - T_1)$$

$$= -\frac{\kappa}{a} \Delta T$$

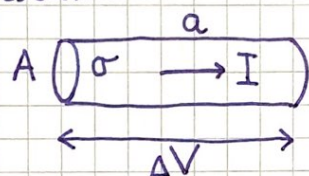
	Luft [†]	"Glava"	Vann	Is	Glass	Tre	Stål	Diamant	(87)
κ (W/Km)	0.026	0.035	0.61	2.2	1	0.15	45	2000	

Ohms lov: $\vec{j} = \sigma \vec{E} = -\sigma \nabla V$

Fouriérs lov: $\vec{j} = -\kappa \nabla T$

Alt vi kan om strøm og motstand i elmag kan vi nå "oversette" direkte til varme-strøm og varmemotstand.

Elektrisk motstand:



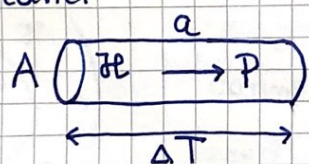
σ = elektrisk ledningsevne

$j = I/A$ = strømtetthet; $I = \frac{dQ}{dt}$; Q = ladning

$j = \sigma E$ og $\Delta V = E \cdot a \Rightarrow j = \sigma \Delta V / a$

Dermed: $\Delta V = R \cdot I$ med $R = a / \sigma A$; $[R] = \frac{V}{A} (= \Omega)$

Varmemotstand:



κ = varmeledningsevne

$j = P/A$ = varmestrømtetthet; $P = \frac{dQ}{dt}$; Q = varme

$j = \kappa \Delta T / a$

Dermed: $\Delta T = R_Q \cdot P$ med varmemotstand $R_Q = a / \kappa A$; $[R_Q] = \frac{K}{W}$

Seriekobling: $R_Q = R_Q^{(1)} + R_Q^{(2)} + \dots$

Parallellkobling: $1/R_Q = 1/R_Q^{(1)} + 1/R_Q^{(2)} + \dots$

Ert: $G_Q = \kappa A/a = \text{varmekonduktans}$; $P = G_Q \cdot \Delta T$ (88)

Parallellkobling: $G_Q = G_Q^{(1)} + G_Q^{(2)} + \dots$

Eks: Yttervegg (reisverk)

-10°C	tre	glava	tre	+20°C
ute	3cm	20 cm	3cm	inne

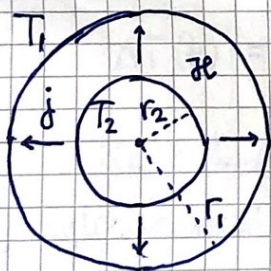
Seriekobling: $R_Q = \left(2 \cdot \frac{0.03}{0.15 \cdot 1} + \frac{0.20}{0.035 \cdot 1} \right) \frac{\text{K}}{\text{W}} = 6.1 \frac{\text{K}}{\text{W}}$
for 1 m^2 av vegg.

Effekt tap pr m^2 : $P = \Delta T / R_Q = 4.9 \text{ W}$

$\Delta T(\text{glava}) = P \cdot R_Q(\text{glava}) = 4.91 \text{ W} \cdot 5.71 \text{ K/W} = 28 \text{ K}$

$\Delta T(\text{trelagene}) = P \cdot R_Q(\text{tre}) = 4.91 \text{ W} \cdot 0.4 \text{ K/W} = 2 \text{ K}$

Sylindersymmetri: Øving 10, nr 5



Grensebetingelser: $T(r_1) = T_1$, $T(r_2) = T_2$

Stasjonær varmeledning $\Rightarrow$ Like mye varmeeffekt gjennom enhver sylinderflate med radius $r_2 < r < r_1$ og lengde L , dvs areal $A(r) = 2\pi r L$

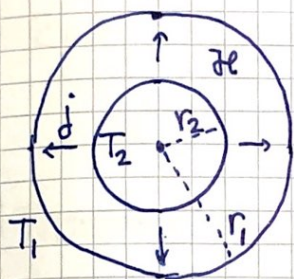
Dermed:

$$\vec{j} = \hat{r} j(r) ; \quad \nabla T = \hat{r} \frac{dT}{dr} ; \quad j(r) = \frac{P}{A(r)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2\pi r L} = -\kappa \frac{dT}{dr} \Rightarrow \int_{r_2}^{r_1} \frac{P}{L r} dr = -2\pi \kappa \int_{T_2}^{T_1} dT$$

$$\Rightarrow \frac{P}{L} = \frac{2\pi \kappa (T_2 - T_1)}{\ln(r_1/r_2)} = \text{radieell varmeeffekt pr lengdeenhet}$$

Kulesymmetri:



Like mye varmeeffekt P gjennom (89)

ethvert kuleskall med radius $r_2 < r < r_1$

og areal $A(r) = 4\pi r^2$

$$\Rightarrow \frac{P}{4\pi r^2} = -\kappa \frac{dT}{dr} \Rightarrow P = \frac{4\pi \kappa (T_2 - T_1)}{1/r_2 - 1/r_1}$$

Newtons avkjølingslov:

Hvordan avkjøles (evt oppvarmes) et endelig system, med varmekapasitet C , via varmeledning til (evt fra) et omgivende reservoar med konstant temperatur T_0 ?

Vi antar en varmemotstand R_Q mellem systemet og reservoaret, men ingen indre varmemotstand i systemet.

Dvs samme $T(t)$ i alle deler av systemet. Dermed:

$$\Delta T(t) = T(t) - T_0 = R_Q \cdot P(t); \quad P(t) = -\frac{dQ}{dt} = -C \frac{dT}{dt}$$

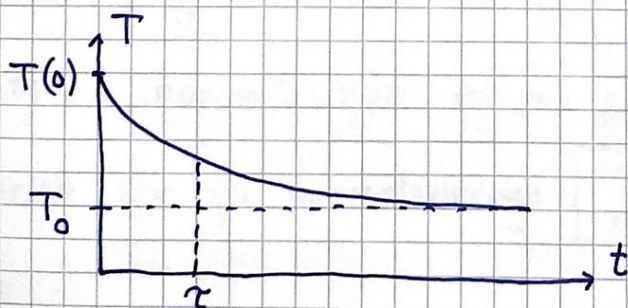
Har $dT/dt = d\Delta T/dt$ slik at $\frac{d\Delta T}{\Delta T} = -\frac{dt}{R_Q C}$, med løsning

$$\Delta T(t) = \Delta T(0) e^{-t/\tau}; \quad \tau = R_Q C$$

1D: $R_Q = L/\kappa A$

2D, sylinderskall: $R_Q = \frac{\ln(r_1/r_2)}{2\pi \kappa L}$

3D, kuleskall: $R_Q = \frac{1/r_2 - 1/r_1}{4\pi \kappa}$



Varmeledningsligningen:

(90)

Energibevarelse uttrykkes ved en kontinuitetsligning:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad ; \quad u = \text{energi pr volumenhett}$$

[Tilsvarende for masse, ladning og sannsynlighet, jf. hhv.
TFY4163, FY1003 og TFY4215]

For volum V : $C_V = \frac{dU}{dT} = V \frac{du}{dT} \Rightarrow du = c \cdot dT \quad ; \quad c = C_V/V$

Dermed: $\partial u / \partial t = c \partial T / \partial t$

Fouriers lov: $\vec{j} = -\kappa \nabla T \Rightarrow \nabla \cdot \vec{j} = -\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$

Anta homogent stoff med konstant κ :

$$\nabla \cdot \vec{j} = -\kappa \nabla^2 T \quad ; \quad \nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$$

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T}$$

Varmeledningsligningen

$D_T = \kappa / c = \text{termisk diffusivitet} \quad (\text{m}^2/\text{s})$

$c = \text{varmekapasitet pr volumenhett} \quad (\text{J}/\text{K m}^3)$

$\kappa = \text{varmeledningseffekt} \quad (\text{W}/\text{K m})$

10.6, 10.8 Diffusjon

er netto transport av partikler pga konsentrasjonsforskjeller.

Altså ikke strømming pga trykkforskjeller; andre typer partikler sørger for konstant total konsentrasjon.

$n(\vec{r}, t) = \text{konsentrasjon av en gitt type partikler}$

Empirisk som for varmeledning:

$$\boxed{\vec{j} = -D \nabla n}$$

Ficks lov

(91)

$\vec{j}$ = netto antall partikler av gitt type gjennom en flate, pr tids- og flateenhet ($1/m^2s$)

n = antall slike partikler pr volumenhet ($1/m^3$)

D = diffusjonskonstanten (m^2/s)

Kontinuitetsligning for partikkelbevarelse:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Kombinert med Ficks lov og en antagelse om homogene omgivelser - og dermed konstant D - gir

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n}$$

Diffusjonsligningen

Noen tallverdier for D (cm^2/s ved $20^\circ C$ og $1 atm$):

• I luft: $D_{CO_2} = 0.16$, $D_{H_2O} = 0.24$

I vann: $D_{CO_2} = 1.7 \cdot 10^{-5}$

• Ladbingsbærere i Si (silisium; en halvleder)

Elektroner: $D_n = 39$

Hull: $D_p = 12$

Avsluttende eksempler:

92

Eks 1: Skalering

Hvis det tar 12 minutter å koke en potet på 30g, hvor lang tid trenger en potet på 120g?

Løsn 1: Varmeledningsligningen er uendret hvis lengder skaleres med en faktor α og tid skaleres med α^2 :

$$\frac{\partial T}{\partial (\alpha^2 t)} = D_T \left(\frac{\nabla}{\alpha} \right)^2 T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Her er $\alpha = (120/30)^{1/3}$ så koketida øker til

$$12 \text{ min.} \cdot \alpha^2 = 12 \text{ min.} \cdot 4^{2/3} \approx 30 \text{ min.}$$

Eks 2: Is på innsjø

Anta konstant temp. 0°C i vannet og en konstant lavere temp. i lufta. Anta varmeledning kun gjennom isen.

Hvordan øker istykkelsen med tida?

Løsn 2: Hvis istykkelsen øker fra z til $z+dz$, frigjøres det på et areal A en varmemengde

$$dQ = l_{sm} \cdot dm = l_{sm} \cdot \rho \cdot A \cdot dz$$

når l_{sm} = smeltevarme pr masseenh. og ρ = masse pr volumenhet.

Fouriers lov: $j = \kappa \Delta T / z$ med $j = dQ / A dt = l_{sm} \rho dz / dt$

Dermed: $z dz = (\kappa \Delta T / l_{sm} \rho) dt$, som med $z(0) = 0$

integreres til:

$$z(t) = \sqrt{2 \kappa \Delta T / l_{sm} \rho} \sqrt{t}$$

Med $\kappa = 2.2 \text{ W/Km}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ og $l_{sm} = 334 \text{ kJ/kg}$ blir

$$z(t; \Delta T) = 0.1148 \sqrt{t \Delta T} \text{ mm} \text{ med } t \text{ og } \Delta T \text{ i hhv s og K.}$$

10 timer med 5 kuldegrader gir istykkelse 49 mm.

Eks 3: Temperatursvingninger i bakken

(93)

Anta harmoniske svingninger på overflaten, ^(z=0) med periode $2\pi/\omega$ lik et år, evt et døgn:

$$T(0,t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$$

Sommer (evt dag): $t=0$; Vinter (evt natt): $t=\pi/\omega$.

Ligning for $T(z,t)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} ; D_T \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

Prøver $T(z,t) = T_0 + T_1 e^{ikz} e^{-i\omega t}$

der $\text{Re } T$ oppfyller grensebetingelsen $T(0,t)$ ovenfor.

Innsetting gir $-i\omega = -D_T k^2$

$$\Rightarrow k = \sqrt{i\omega/D_T} = (1+i) \sqrt{\omega/2D_T} \quad [\text{da } \sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}]$$

$$\Rightarrow T(z,t) = T_0 + T_1 \exp(-\sqrt{\omega/2D_T} z) \cos(\sqrt{\omega/2D_T} z - \omega t)$$

dvs en dempet bølge nedover i bakken.

Årstidsvariasjoner: $\sqrt{2D_T/\omega} \approx 2.24 \text{ m}$; $\omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$

$\Rightarrow T(z,t)$ i motfase med $T(0,t)$ i dybde $z \approx 7 \text{ m}$, dvs kaldest om sommeren, men små variasjoner siden $\exp(-\pi) \approx 0.043$

Døgn-variasjoner: $\sqrt{2D_T/\omega} \approx 14 \text{ cm}$; $\omega = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

$\Rightarrow$ Variasjoner av betydning ned til dybde 30-40 cm

Eks 4: Diffusjon med en lokalisert kilde

(94)

Anta N molekyler nær origo ved $t=0$. Hvor raskt sprer molekylene seg utover?

Løsn 4: Ligningen $\partial n / \partial t = D \nabla^2 n$ viser at i avstand d fra kilden tar det en tid av størrelsesorden d^2/D før en "betydelig" andel av molekylene har nådd fram. Evt, etter en tid t har molekyler diffundert til en avstand av størrelsesorden $\sqrt{D \cdot t}$.

Jf. RC-krets: $-RI - Q/C = 0 \Rightarrow dQ/dt = -Q/RC$

$\Rightarrow \tau = RC$ er karakteristisk tid.

Evt. RL-krets: $-RI - L dI/dt = 0 \Rightarrow dI/dt = -I/(L/R)$

$\Rightarrow \tau = L/R$ er karakteristisk tid.

Små molekyler i luft: $D \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ (s. 91)

$\Rightarrow \sqrt{D \cdot t} \approx 3 \text{ cm}$ etter 1 minutt og 27 cm etter 1 time

Eksakt løsning med $n(\vec{r}, 0) = N \delta(\vec{r})$:

$$n(\vec{r}, t) = n(r, t) = N \cdot (4\pi Dt)^{-3/2} \cdot \exp(-r^2/4Dt)$$

[Vis dette ved innsetting; $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (2/r)\partial/\partial r$ ved kulesymmetri]

$$\Rightarrow \langle r^2(t) \rangle = \frac{1}{N} \int r^2 n(r, t) d^3r = \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty r^2 n(r, t) r^2 dr = 6Dt$$

[Se s. 53; Gaussintegral $\frac{1}{2} I_4$ med $b = 1/4Dt$]

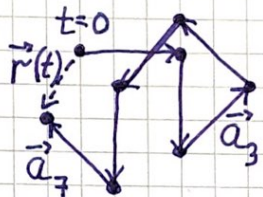
Midlere diffusjonslengde:

$$d(t) = \sqrt{\langle r^2(t) \rangle} = \sqrt{6Dt}$$

Eks 5: Virrevandring (Random walk)

(95)

Vi kan beskrive diffusjon som molekylers bevegelse, steg for steg med lengde a og fart v , i tilfeldig retning:



$$\vec{r}(t) = \vec{r}(M \cdot \Delta t) = \sum_{j=1}^M \vec{a}_j$$

er molekylets forflytning(-vektor) etter M steg, hvert med varighet $\Delta t = a/v$

Midlere diffusjonslengde:

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle r^2(t) \rangle} &= \sqrt{\langle \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) \rangle} = \left\{ \left\langle \sum_{j=1}^M \vec{a}_j \cdot \sum_{k=1}^M \vec{a}_k \right\rangle \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \sum_j \sum_k \langle \vec{a}_j \cdot \vec{a}_k \rangle \right\}^{1/2} = \left\{ a^2 \sum_j \sum_k \delta_{kj} \right\}^{1/2} = \sqrt{M} a \end{aligned}$$

ettersom hvert steg er i helt tilfeldig retning.

Etter M steg er $t = M \cdot \Delta t = M \cdot a/v$ slik at $\sqrt{M} a = \sqrt{v a t}$

I realiteten har ikke alle molekyler samme fart, og alle steg er ikke like lange, så vi får erstatte v og a med middelværdier,

$\lambda = \langle a \rangle$ = midlere fri veilengde (mellom kollisjoner)

$\langle v \rangle$ = midlere partikkelfart

$$\Rightarrow \sqrt{\langle r^2(t) \rangle} = \sqrt{\langle v \rangle \lambda t}$$

som sammenlignet med Eks 4, $\sqrt{\langle r^2(t) \rangle} = \sqrt{6Dt}$, viser at diffusjonskonstanten D er proporsjonal med λ og $\langle v \rangle$.

[Dette er også utledet i 10.7 i boka, for gasser.]