

Øving 7

Oppgave 1. Adiabatisk demagnetisering

I en tidligere oppgave studerte vi en ideell paramagnet med N ikke-vekselvirkende kvantiserte spinn i et ytre magnetfelt $\mathbf{B}$. Hvert spinn kunne peke ”opp” eller ”ned” relativt det ytre feltet, slik at partisjonsfunksjonen (pr spinn) ble $z = 2 \cosh(\mu_B B/kT)$, og magnetiseringen (magnetisk moment pr volumenhet) ble $M/V = (N\mu_B/V) \tanh(\mu_B B/kT)$. Hvis feltet er svakt, dvs $\mu_B B \ll kT$, gir dette lineær respons, $M/V \sim B/T$, dvs Curie’s lov.

I denne oppgaven skal vi studere entropien til en slik ideell paramagnet. Siktemålet er deretter å kunne beskrive magnetisk kjøling (adiabatisk demagnetisering).

Merk: I øving 5 var M magnetisk moment pr volumenhet. Her er M rett og slett totalt magnetisk moment, dvs M/V er magnetisering. Dessuten bruker vi i disse oppgavene k og ikke k_B som symbol for Boltzmanns konstant.

Som i øving 5 lar vi m angi midlere magnetisk moment pr spinn (eller pr partikkel, om du vil), men skalert med faktoren μ_B slik at et gitt magnetisk moment har verdien $+1$ eller -1 , og m blir en dimensjonsløs størrelse. Videre lar vi $h = \mu_B B$ representere det ytre magnetfeltet, dvs h blir en størrelse med enhet som energi. Dermed har vi

$$m = \tanh \beta h \quad , \quad z = 2 \cosh \beta h \quad (\beta \equiv 1/kT),$$

og arbeidet utført av spinnsystemet, pr spinn, når midlere magnetisk moment, pr spinn, endres fra m til $m + dm$ blir $\delta w = -h dm$.

a) Vis at entropien σ kan uttrykkes ved partisjonsfunksjonen z , som $\sigma = k \partial(T \ln z)/\partial T$.

Oppgitt: $f = -kT \ln z$, $f = u - T\sigma$, $Td\sigma = du + p dv$ (med $f, z, u, \sigma, v =$ hhv Helmholtz fri energi, partisjonsfunksjon, indre energi, entropi og volum, alle størrelser pr spinn).

Tips: Utnytt analogien $p dv \rightarrow -h dm$.

b) Med kjent partisjonsfunksjon z kan dermed entropien σ bestemmes. Vis at σ , i første omgang som funksjon av h og β , blir

$$\sigma = k [\ln 2 + \ln \cosh \beta h - \beta h \tanh \beta h].$$

Du observerer nå at σ kun avhenger av produktet βh , og siden midlere magnetiske moment m også er en funksjon av produktet βh , innser du at entropien må kunne skrives som en funksjon av m alene, $\sigma = \sigma(m)$. Eliminer βh fra $\sigma(\beta h)$ ved å invertere $m = \tanh(\beta h)$. Vis at dette gir $\beta h = \frac{1}{2} \ln [(1+m)/(1-m)]$. Vis deretter at entropien blir

$$\sigma(m) = k \left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m) \ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m) \ln(1-m) \right].$$

c) Alternativt kan entropien bestemmes direkte fra Boltzmanns prinsipp, $S = N\sigma = k \ln W$. Anta at et antall N_+ og N_- spinn peker henholdsvis med og mot magnetfeltet. Totalt magnetisk moment blir dermed $Nm = N_+ - N_-$. Samtidig har vi selvsagt $N = N_+ + N_-$. Beregn antall mikrotilstander W som er forenlig med et gitt magnetisk moment Nm (dvs med $Nm = N_+ - N_-$ fast) og vis med det at entropien blir som i punkt b.

Oppgitt: $\ln N! = N \ln N - N$ når $N \rightarrow \infty$.

d) Et spinnsystem som dette kan benyttes til å oppnå svært lave temperaturer ved å bruke adiabatisk demagnetisering. Et kraftig magnetfelt h_2 settes på isotermt ved en (forholdsvis lav) starttemperatur T_2 . Deretter fjernes den termiske koblingen til omgivelsene (varmereservoaret med temperatur T_2), og magnetfeltet slås av adiabatisk. I praksis, på grunn av en svak kobling mellom spinnene, ender en opp med et effektivt magnetfelt $h_1 > 0$ (og ikke $h_1 = 0$). Hva blir resulterende temperatur T_1 ? [Vi antar at andre bidrag til entropien kan neglisjeres. For lave temperaturer T er spesifikk varme fra kvantiserte gittervibrasjoner $C \propto T^3$, slik at bidraget til entropien herfra, $\int (C/T) dT$ kan neglisjeres.]

Arbeidsleddet med magnetiske systemer:

Vi foretar utledningen med en lang og tettviklet spole med N viklinger over lengden L , dvs viklingstetthet $n = N/L$. Spolen har en magnetisk kjerne med tverrsnitt A , slik at magnetens volum er $V = AL$. En strøm I i spoletråden gir med Amperes lov $H = nI$, og et magnetfelt $B = \mu_0(H + M/V)$. Her er M/V magnetiseringen i spolekjernen, dvs magnetisk moment M pr volumenhet.

Dersom strømstyrken I varierer, vil omsluttet fluks ϕ variere. Ifølge Faraday får vi nå en induert elektromotorisk spenning $-d\phi/dt$, som multiplisert med strømstyrken I tilsvarer en effekt eller et arbeid utført pr tidsenhet på omgivelsene (de bevegelige ladningene som utgjør strømmen I):

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} I = -NA \frac{dB}{dt} I = -nLA \frac{dB}{dt} I = -V \frac{dB}{dt} H.$$

Dermed:

$$dW = -V H dB = -V \mu_0 H dH - \mu_0 H dM.$$

Den magnetiske vakuumenergien pr volumenhet er $(1/2)\mu_0 H^2$, så det første leddet tilsvarer endringen i vakuumenergien. Siden systemet er selve materialet, blir det kun det siste leddet som representerer utført arbeid av systemet:

$$dW = -\mu_0 H dM.$$