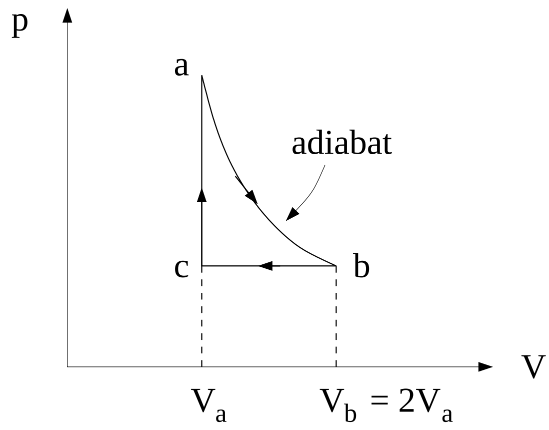
FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2014.
Veiledning: 3. og 6. februar. Innleveringsfrist: Fredag 7. februar kl 16.

Øving 4

Oppgave 1

En viss mengde enatomig ideell gass gjennomløper kretsprosessen vist på figuren. Hva er adiabatkonstanten for en slik gass? Langs hvilke deler av kretsprosessen tilføres og fjernes varme fra gassen? Beregn virkningsgraden η. [Hint: Det kan forenkle litt å beregne temperaturene i punktene a, b og c i forhold til hverandre. Da kan en unngå beregning av arbeid. Alternativt kan arbeidet bestemmes ved integrasjon.] Hva er, for sammenligningens skyld, virkningsgraden η_C for en Carnot-varmekraftmaskin som arbeider mellom to reservoar med temperaturer lik henholdsvis den største og den minste temperatur som opptrer i prosessen i figuren? [Som nevnt i forelesningene, er η_C den *maksimale* virkningsgraden for en varmekraftmaskin som opererer mellom to gitte temperaturer.]



Oppgave 2

Ei elv skal brukes som lavtemperaturreservoar for et stort varmekraftverk med virkningsgrad $\eta = 0.40$. Av økologiske grunner begrenses varmen som dumpes i elva til 1500 MW. Hva er den maksimale elektriske effekten kraftverket kan levere, og hva er tilført varmeenergi som da trengs for å drive kraftverket? Hvor stor vannføring, f.eks i enheten tonn/s, trengs dersom temperaturstigningen i elva skal begrenses til 5 K? (Vannets varmekapasitet er 1 cal/gK.)

Oppgave 3

a) Bruk Maxwells hastighetskomponentfordeling $g(v_x)$ (se forelesningene) til å beregne $\langle |v_x| \rangle$, $\langle v_x^3 \rangle$ og $\langle v_x^4 \rangle$.

b) Beregn middelverdien av invers fart, $\langle 1/v \rangle$, og sammenlign med den inverse av $\langle v \rangle$.

Oppgave 4

Minste hastighet V for å unnslippe gravitasjonsfeltet til en planet med masse m og radius r er $V = \sqrt{2Gm/r}$, der G er gravitasjonskonstanten. La oss anta at molekylene i planetens atmosfære bør ha en "rms-hastighet", dvs $v_{\rm rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, som er mindre enn $V/6$ dersom de på lang sikt (f.eks noen millioner år) ikke skal forsvinne ut i verdensrommet.

a) Vis at planetens overflatetemperatur da må oppfylle betingelsen $T < GMm/54Rr$ for at molekyler med molar masse M ikke skal forsvinne fra planetens atmosfære. Her er R gasskonstanten.

b) Bruk ulikheten i spm *a* til å vurdere muligheten for å finne hydrogen i atmosfæren til jorda og jupiter. Er ulikheten konsistent med at jordas atmosfære er rik på nitrogen og oksygen? Hva med fraværet av atmosfære på månen?
[Jordas masse: $6.0 \cdot 10^{24}$ kg. Jordas radius: $6.4 \cdot 10^6$ m. Jupiters masse: $1.9 \cdot 10^{27}$ kg. Jupiters radius: $7.2 \cdot 10^7$ m. Månens masse: $7.4 \cdot 10^{22}$ kg. Månens radius: $1.7 \cdot 10^6$ m. Molare masser for H_2, N_2, O_2: 2 g, 28 g, 32 g. Gasskonstanten: $R = 8.314$ J/mol K. Gravitasjonskonstanten: $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.]

Oppgave 5

Et elektron har kvantisert magnetisk moment

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m_e}\,\boldsymbol{S}.$$

Her er $-e$, m_e og $\boldsymbol{S}$ hhv ladningen, massen og spinnet til elektronet. I et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ vil elektronspinnets komponent S_z i magnetfeltets retning kun ha to mulige verdier, $\pm\hbar/2$, slik at den potensielle energien $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ (jf grunnleggende magnetostatikk) kun kan ha verdien $E_- = -\mu_B B$ eller $E_+ = \mu_B B$, svarende til at $\boldsymbol{\mu}$ peker i hhv samme retning som $\boldsymbol{B}$ eller motsatt retning av $\boldsymbol{B}$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ en såkalt Bohr-magneton.

I termisk likevekt er sannsynligheten $p(s)$ for at elektronet befinner seg i den ene eller den andre av de to mulige tilstandene (med $s = \pm 1$ svarende til $E_\pm$)

$$p(s) = C\,e^{-sx},$$

dvs proporsjonal med *Boltzmannfaktoren.* Her er C en normeringskonstant, og $x = \mu_B B/kT$ er en dimensjonsløs størrelse som angir spinnets potensielle energi i magnetfeltet relativt den tilgjengelige termiske energien kT.

a) Beregn normeringskonstanten C, og bestem dermed partisjonsfunksjonen $Z = 1/C$.

b) Elektronets midlere magnetiske moment m er gitt ved

$$m = \langle \mu \rangle = \sum_{s=\pm 1} (-s)\,\mu_B\,p(s).$$

[Minustegn foran s fordi $s = 1$ tilsvarer $\boldsymbol{\mu}$ i negativ z-retning.] Med N slike elektroner, hva blir systemets magnetisering M (dvs magnetisk moment pr volumenhet)? Vis at dette resultatet er i samsvar med Curies lov, $M \sim 1/T$, for høye temperaturer (evt svakt magnetfelt). Hva blir M dersom $\mu_B B \gg kT$? Enn hvis $T = 0$? Er disse svarene rimelige?

Noen svar og opplysninger:
Oppgave 1: $\eta = 0.23$, $\eta_C = 0.69$. Oppgave 2: 72 tonn/s. Oppgave 4b: Jorda, N_2: $T < 3900$ K.
Oppgave 5b: $m = \mu_B \tanh x$. $\tanh x = x$ for $x \ll 1$. $\tanh x = 1$ for $x \gg 1$.