

## Øving 6

## Oppgave 1

- a) Bruk Maxwells hastighetskomponentfordeling  $g(v_x)$  (se forelesningene) til å beregne  $\langle |v_x| \rangle$ ,  $\langle v_x^3 \rangle$  og  $\langle v_x^4 \rangle$ .
- b) Beregn middelveiden av invers fart,  $\langle 1/v \rangle$ , og sammenlign med den inverse av  $\langle v \rangle$ .

## Oppgave 2

Minste hastighet  $V$  for å unnslippe gravitasjonsfeltet til en planet med masse  $m$  og radius  $r$  er  $V = \sqrt{2Gm/r}$ , der  $G$  er gravitasjonskonstanten. La oss anta at molekylerne i planetens atmosfære bør ha en "rms-hastighet", dvs  $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ , som er mindre enn  $V/6$  dersom de på lang sikt (f.eks noen millioner år) ikke skal forsvinne ut i verdensrommet.

- a) Vis at planetens overflatetemperatur da må oppfylle betingelsen  $T < GMm/54Rr$  for at molekyler med molar masse  $M$  ikke skal forsvinne fra planetens atmosfære. Her er  $R$  gasskonstanten.

- b) Bruk ulikheten i spm a til å vurdere muligheten for å finne hydrogen i atmosfæren til jorda og jupiter. Er ulikheten konsistent med at jordas atmosfære er rik på nitrogen og oksygen? Hva med fraværet av atmosfære på månen?

[Jordas masse:  $6.0 \cdot 10^{24}$  kg. Jordas radius:  $6.4 \cdot 10^6$  m. Jupiters masse:  $1.9 \cdot 10^{27}$  kg. Jupiters radius:  $7.2 \cdot 10^7$  m. Månens masse:  $7.4 \cdot 10^{22}$  kg. Månens radius:  $1.7 \cdot 10^6$  m. Molare masser for  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ : 2 g, 28 g, 32 g. Gasskonstanten:  $R = 8.314$  J/mol K. Gravitasjonskonstanten:  $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$  Nm<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>.]

## Oppgave 3

Et elektron har kvantisert magnetisk moment

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{S}.$$

Her er  $-e$ ,  $m_e$  og  $\mathbf{S}$  hhv ladningen, massen og spinnet til elektronet. I et ytre magnetfelt  $\mathbf{B} = B \hat{z}$  vil elektronspinnets komponent  $S_z$  i magnetfeltets retning kun ha to mulige verdier,  $\pm \hbar/2$ , slik at den potensielle energien  $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$  (jf grunnleggende magnetostatikk) kun kan ha verdien  $E_- = -\mu_B B$  eller  $E_+ = \mu_B B$ , svarende til at  $\boldsymbol{\mu}$  peker i hhv samme retning som  $\mathbf{B}$  eller motsatt retning av  $\mathbf{B}$ . Her er  $\mu_B = e\hbar/2m_e$  et såkalt Bohr-magneton.

I termisk likevekt er sannsynligheten  $p(s)$  for at elektronet befinner seg i den ene eller den andre av de to mulige tilstandene (med  $s = \pm 1$  svarende til  $E_{\pm}$ )

$$p(s) = C e^{-sx},$$

dvs proporsjonal med Boltzmannfaktoren. Her er  $C$  en normeringskonstant, og  $x = \mu_B B/k_B T$  er en dimensjonsløs størrelse som angir spinnets potensielle energi i magnetfeltet relativt den tilgjengelige termiske energien  $k_B T$ .

- a) Beregn normeringskonstanten  $C$ , og bestem dermed partisjonsfunksjonen  $Z = 1/C$ .

b) Elektronets midlere magnetiske moment  $m$  er gitt ved

$$m = \langle \mu \rangle = \sum_{s=\pm 1} (-s) \mu_B p(s).$$

[Minustegn foran  $s$  fordi  $s = 1$  tilsvarer  $\mu$  i negativ  $z$ -retning.] Med  $N$  slike elektroner, hva blir systemets magnetisering  $M$  (dvs magnetisk moment pr volumenhet)? Vis at dette resultatet er i samsvar med Curies lov,  $M \sim 1/T$ , for høye temperaturer (evt svakt magnetfelt). Hva blir  $M$  dersom  $\mu_B B \gg k_B T$ ? Enn hvis  $T = 0$ ? Er disse svarene rimelige?

Et par svar og opplysninger:

Oppgave 2b: Jorda,  $N_2$ :  $T < 3900$  K.

Oppgave 3b:  $m = \mu_B \tanh x$ .  $\tanh x = x$  for  $x \ll 1$ .  $\tanh x = 1$  for  $x \gg 1$ .

#### Oppgave 4.

---

a) Argon er en enatomig gass (dvs enkeltatomer) med atomdiameter ca 0.38 nm. Hvor stor andel av tilgjengelig volum okkuperer da argonatomene ved romtemperatur (300 K) og trykk  $10^{-3}$  Pa (et ikke unormalt trykk i et elektronmikroskop, og blant folk som driver med overflatefysikk)? (Det oppgis at kuler har volum  $4\pi r^3/3$ .)

- A)  $7 \cdot 10^{-6}$                       B)  $3 \cdot 10^{-6}$   
C)  $7 \cdot 10^{-12}$                     D)  $3 \cdot 10^{-12}$
- 

b) Argon har atomnummer 18, og i tillegg til de 18 protonene er det 22 nøytroner i atomkjernen. (Den mest vanlige isotopen, som utgjør ca 99.6%.) Hva blir da (omtrent) midlere partikkelhastighet  $\langle v \rangle$  i en argongass ved termodynamiske betingelser som i oppgave a?

- A) 4 m/s                      B) 400 m/s                      C) 40000 m/s                      D) 4000000 m/s
- 

c) Hydrogenmolekylet,  $H_2$ , har mulige ("tillatte") rotasjonsenergier

$$K_{\text{rot}}^{(l)} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I_0} \quad , \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Her er  $\hbar = h/2\pi \simeq 1.05 \cdot 10^{-34}$  Js ( $h$  = Plancks konstant), og  $I_0 = md^2/2$  er molekylets treghetsmoment med hensyn på akser som står normalt på molekylets sylinder-symmetriakse, og som passerer gjennom molekylets massesenter. For hydrogenmolekylet er  $\hbar^2/I_0 \simeq 15$  meV. Det oppgis dessuten at  $k_B \simeq 0.086$  meV/K. La  $\pi_l$  være sannsynligheten for at et gitt molekyll er i "rotasjonstilstand"  $l$ , med rotasjonsenergi  $K_{\text{rot}}^{(l)}$ . Hva er da forholdet  $\pi_1/\pi_0$  ved temperatur 77 K (flytende nitrogen)?

- A) ca 1.8                      B) ca 0.1                      C) ca 0.0001                      D) ca  $10^{-9}$
-