TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.

Øving 7

Oppgave 1. Adiabatisk demagnetisering

I en tidligere oppgave studerte vi en ideell paramagnet med N ikke-vekselvirkende kvantiserte spinn i et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B}$. Hvert spinn kunne peke "opp" eller "ned" relativt det ytre feltet, slik at partisjonsfunksjonen (pr spinn) ble $z = 2\cosh(\mu_B B/k_B T)$, og magnetiseringen (magnetisk moment pr volumenhet) ble $M/V = (N\mu_B/V)\tanh(\mu_B B/k_B T)$. Hvis feltet er svakt, dvs $\mu_B B \ll k_B T$, gir dette lineær respons, $M/V \sim B/T$, dvs Curie's lov.

I denne oppgaven skal vi studere entropien til en slik ideell paramagnet. Siktemålet er deretter å kunne beskrive magnetisk kjøling (adiabatisk demagnetisering).

Merk: I øving 6 var M magnetisk moment pr volumenhet. Her er M rett og slett totalt magnetisk moment, dvs M/V er magnetisering.

Som i øving 6 lar vi m angi midlere magnetisk moment pr spinn (eller pr partikkel, om du vil), men skalert med faktoren μ_B slik at et gitt magnetisk moment har verdien $+1$ eller -1, og m blir en dimensjonsløs størrelse. Videre lar vi $h = \mu_B B$ representere det ytre magnetfeltet, dvs h blir en størrelse med enhet som energi. Dermed har vi

$$m = \tanh\beta h \quad , \quad z = 2\cosh\beta h \quad (\beta \equiv 1/k_B T),$$

og arbeidet utført av spinnsystemet, pr spinn, når midlere magnetisk moment, pr spinn, endres fra m til $m + dm$ blir $đw = -h\, dm$.

a) Vis at entropien σ kan uttrykkes ved partisjonsfunksjonen z, som $\sigma = k_B\, \partial(T\ln z)/\partial T$.

Oppgitt: $f = -k_B T\ln z$, $f = u - T\sigma$, $T d\sigma = du + p\, dv$ (med f, z, u, σ, v = hhv Helmholtz fri energi, partisjonsfunksjon, indre energi, entropi og volum, alle størrelser pr spinn).
Tips: Utnytt analogien $p\, dv \to -h\, dm$.

b) Med kjent partisjonsfunksjon z kan dermed entropien σ bestemmes. Vis at σ, i første omgang som funksjon av h og β, blir

$$\sigma = k_B\left[\ln 2 + \ln\cosh\beta h - \beta h\tanh\beta h\right].$$

Du observerer nå at σ kun avhenger av *produktet* βh, og siden midlere magnetiske moment m også er en funksjon av produktet βh, innser du at entropien må kunne skrives som en funksjon av m alene, $\sigma = \sigma(m)$. Eliminer βh fra $\sigma(\beta h)$ ved å invertere $m = \tanh(\beta h)$. Vis at dette gir $\beta h = \frac{1}{2}\ln\left[(1+m)/(1-m)\right]$. Vis deretter at entropien blir

$$\sigma(m) = k_B\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right].$$

c) Alternativt kan entropien bestemmes direkte fra Boltzmanns prinsipp, $S = N\sigma = k_B\ln W$. Anta at et antall N_+ og N_- spinn peker henholdsvis med og mot magnetfeltet. Totalt magnetisk moment blir dermed $Nm = N_+ - N_-$. Samtidig har vi selvsagt $N = N_+ + N_-$. Beregn antall mikrotilstander W som er forenlig med et gitt magnetisk moment Nm (dvs med $Nm = N_+ - N_-$ fast) og vis med det at entropien blir som i punkt *b*.

Oppgitt: $\ln N! = N \ln N - N$ når $N \to \infty$.

d) Et spinnsystem som dette kan benyttes til å oppnå svært lave temperaturer ved å bruke adiabatisk demagnetisering. Et kraftig magnetfelt h_2 settes på isotermt ved en (forholdsvis lav) starttemperatur T_2. Deretter fjernes den termiske koblingen til omgivelsene (varmereservoaret med temperatur T_2), og magnetfeltet slås av adiabatisk. I praksis, på grunn av en svak kobling mellom spinnene, ender en opp med et effektivt magnetfelt $h_1 > 0$ (og ikke $h_1 = 0$). Hva blir resulterende temperatur T_1? [Vi antar at andre bidrag til entropien kan neglisjeres. For lave temperaturer T er spesifikk varme fra kvantiserte gittervibrasjoner $C \propto T^3$, slik at bidraget til entropien herfra, $\int (C/T)\, dT$ kan neglisjeres.]

Arbeidsleddet med magnetiske systemer:

Vi foretar utledningen med en lang og tettviklet spole med N viklinger over lengden L, dvs viklingstetthet $n = N/L$. Spolen har en magnetisk kjerne med tverrsnitt A, slik at magnetens volum er $V = AL$. En strøm I i spoletråden gir med Amperes lov $H = nI$, og et magnetfelt $B = \mu_0(H + M/V)$. Her er M/V magnetiseringen i spolekjernen, dvs magnetisk moment M pr volumenhet.

Dersom strømstyrken I varierer, vil omsluttet fluks ϕ variere. Ifølge Faraday får vi nå en indusert elektromotorisk spenning $-d\phi/dt$, som multiplisert med strømstyrken I tilsvarer en effekt eller et arbeid utført pr tidsenhet på omgivelsene (de bevegelige ladningene som utgjør strømmen I):

$$\frac{đW}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}\, I = -NA\frac{dB}{dt}\, I = -nLA\frac{dB}{dt}\, I = -V\frac{dB}{dt}\, H.$$

Dermed:

$$đW = -VHdB = -V\mu_0 HdH - \mu_0 HdM.$$

Den magnetiske vakuumenergien pr volumenhet er $(1/2)\mu_0 H^2$, så det første leddet tilsvarer endringen i vakuumenergien. Siden systemet er selve materialet, blir det kun det siste leddet som representerer utført arbeid av systemet:

$$đW = -\mu_0 HdM.$$