

Spredning på δ -potensialet er enkelt og litt pussig: (78)

$$x < 0: \psi = e^{ikx} + r e^{-ikx} \quad (\text{inn fra venstre; } E = \hbar^2 k^2 / 2m)$$

$$\psi' = ik(e^{ikx} - r e^{-ikx})$$

$$x > 0: \psi = t e^{ikx}$$

$$\psi' = ikt e^{ikx}$$

$$\psi \text{ kont. i } x=0 \Rightarrow 1+r=t$$

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} \psi(0)$$

$$\Rightarrow ikt - ik(1-r) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} t$$

$$r=t-1 \Rightarrow ikt - ik(2-t) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} t$$

$$\Rightarrow 2ikt + \frac{2m\beta}{\hbar^2} t = 2ik$$

$$\Rightarrow t = (1 + m\beta / ik\hbar^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow T = |t|^2 = (1 + (m\beta / k\hbar^2)^2)^{-1}$$

som med $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, dvs $k^2 = 2mE / \hbar^2$, gir

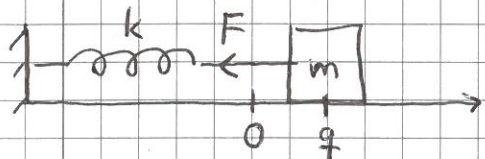
$$\underline{T(E) = (1 + m\beta^2 / 2E\hbar^2)^{-1}}; \quad \underline{R(E) = (1 + 2E\hbar^2 / m\beta^2)^{-1}}$$

Dvs T er uavhengig av fortegnet på β

$\Rightarrow$ samme T for brønn og barriere med gitt styrke β !

Harmonisk oscillator

[PCH 3.5; DJG ; IØ 3.4]



$$F(q) = -kq, \quad V(q) = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

$$q(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{klassisk})$$

$$\omega = \sqrt{k/m} ; E (= V_{\max}) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

QM: $\Psi(q,t) = \psi(q) e^{-iEt/\hbar}$

TUSL: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dq^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \psi = E\psi \quad / \cdot (-1)$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{d(\sqrt{2m}\cdot q/\hbar)^2} + \left(E - \left(\frac{\sqrt{2m}\cdot q}{\hbar} \right)^2 \cdot \frac{\hbar^2 \omega^2}{4} \right) \psi = 0 \quad / \cdot \left\{ \frac{2}{\hbar\omega} \right\}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\psi}{d(\sqrt{m\omega/\hbar} \cdot q)^2} + \left(\frac{E}{\hbar\omega/2} - \frac{q^2 m\omega}{\hbar} \right) \psi = 0$$

$x \equiv q \sqrt{m\omega/\hbar}$
 $\Rightarrow$
 $\varepsilon \equiv E/(\hbar\omega/2)$

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\varepsilon - x^2)\psi = 0}$$

ID QM
 Harm Osc på
 dim. løs form

Siden $(e^{-x^2/2})'' = (-x e^{-x^2/2})' = -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2}$,

ser vi at $\psi_0(x) = C_0 e^{-x^2/2}$ er løsning ;

$$C_0 (x^2 - 1) e^{-x^2/2} + C_0 (\varepsilon - x^2) e^{-x^2/2} = 0,$$

dersom $\varepsilon_0 = 1$, dvs $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Her er ψ_0 symmetrisk
 og uten nullpunkter, så dette må være grundtilstanden!

(Normering: $C_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 \Rightarrow C_0 = \pi^{-1/4}$)

Men!! $\tilde{C}_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega q^2/\hbar} dq = 1 \Rightarrow \tilde{C}_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$

Dermed svært fristende å satse på at

$$\psi_1(x) = C_1 x e^{-x^2/2}$$

også er løsning:

$$\begin{aligned} (\psi_1)'' &= (C_1 e^{-x^2/2} - C_1 x^2 e^{-x^2/2})' \\ &= -C_1 x e^{-x^2/2} - 2C_1 x e^{-x^2/2} + C_1 x^3 e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_1 (x^3 - 3x) e^{-x^2/2} + (\epsilon_1 x - x^3) C_1 e^{-x^2/2} = 0$$

$\Rightarrow$ Løsning! Med $\epsilon_1 = 3$, dvs $E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$.

Åpentbart 1. eksiterte tilstand: Antisymmetrisk, med ett nullpunkt!

Dermed ca like fristende å prøve

$$\psi(x) = v(x) e^{-x^2/2}$$

som generell løsning, med "enkel funksjon" $v(x)$,
f.eks. polynom (potensrekke)

$$v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Når er

$$\begin{aligned} \psi'' &= (v e^{-x^2/2})'' = (v' e^{-x^2/2} - x v e^{-x^2/2})' \\ &= (v'' - 2x v' - v + x^2 v) e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (v'' - 2x v' - v + \cancel{x^2 v} + \epsilon v - \cancel{x^2 v}) e^{-x^2/2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v'' - 2x v' + (\epsilon - 1)v = 0} \quad \text{Diff.-lign. for } v(x)$$

Innsetting av $v = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $v' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) x^k$ (81)
 og $v'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) x^k$ gir nå

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ a_{k+2} (k+2)(k+1) - a_k \cdot 2k + a_k (\epsilon - 1) \right\} x^k = 0$$

Må da være null for alle k

$$\Rightarrow a_{k+2} = a_k \frac{2k+1-\epsilon}{(k+1)(k+2)}; \quad k=0,1,2,\dots$$

Dvs: Hvis a_0 og a_1 er kjent (via normering av Ψ_0 og Ψ_1),
 gir dette $a_2, a_4, a_6, \dots$ fra a_0 og $a_3, a_5, \dots$ fra a_1

For store k vil $a_{k+2}/a_k \approx 2/k$. Men da er

$$v(x) \sim e^{x^2} = 1 + x^2 + x^4/2! + \dots = \sum_{k=0,2,4,\dots} x^k / (k/2)!$$

$$\text{med } a_{k+2}/a_k = \frac{(k/2)!}{[(k+2)/2]!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k/2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k/2) \cdot (\frac{k}{2} + 1)} \approx \frac{2}{k}$$

Men: Da er $\Psi(x) = v(x) \exp(-x^2/2) \sim \exp(+x^2/2) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty$,
 som er ufysisk!

$\Rightarrow$ Rekken for a_k må (vegge) bryte av!

$\Rightarrow \epsilon$ må være et odde heiltall

Hvis $\epsilon = 1, 5, 9, 13, \dots$: Da er $\forall$ $a_2, a_4, a_6, a_8, \dots = 0$
 Må nå ha $a_1 = 0$ ($= a_3 = a_5 = \dots$)

Hvis $\epsilon = 3, 7, 11, \dots$: Da er $\forall$ $a_3 = 0, a_5 = 0, a_7 = 0, \dots$
 Må nå ha $a_0 = 0$ ($= a_2 = a_4 = \dots$)

Ansatt: $E_n = \frac{1}{2}\hbar\omega \varepsilon = \frac{1}{2}\hbar\omega(2n+1) = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$; $n=0,1,2,\dots$ (82)

$n=0,2,4,\dots$: Symmetrisk $\Psi_n(x) = U_n(x)e^{-x^2/2}$

$n=1,3,5,\dots$: Antisymmetrisk $\Psi_n(x) = U_n(x)e^{-x^2/2}$

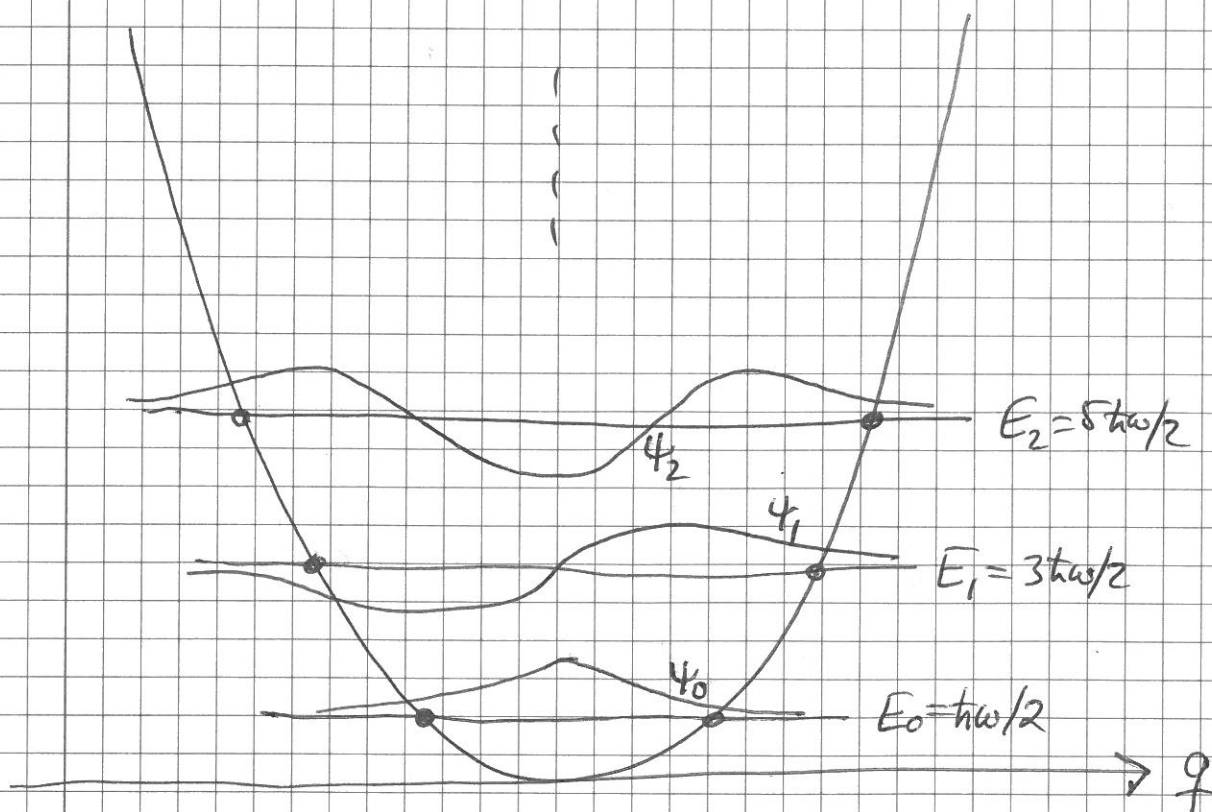
Normerte egenfunksjoner er (med $q = \text{posisjon}$)

$$\Psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-m\omega q^2/2\hbar} H_n\left(\frac{q}{\sqrt{\hbar/m\omega}}\right)$$

Hermite-polynomer:

$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$,

$H_3(x) = 8x^3 - 12x$, $\dots$



• Klassiske vendepunkter ($E=V$; $K=0$)