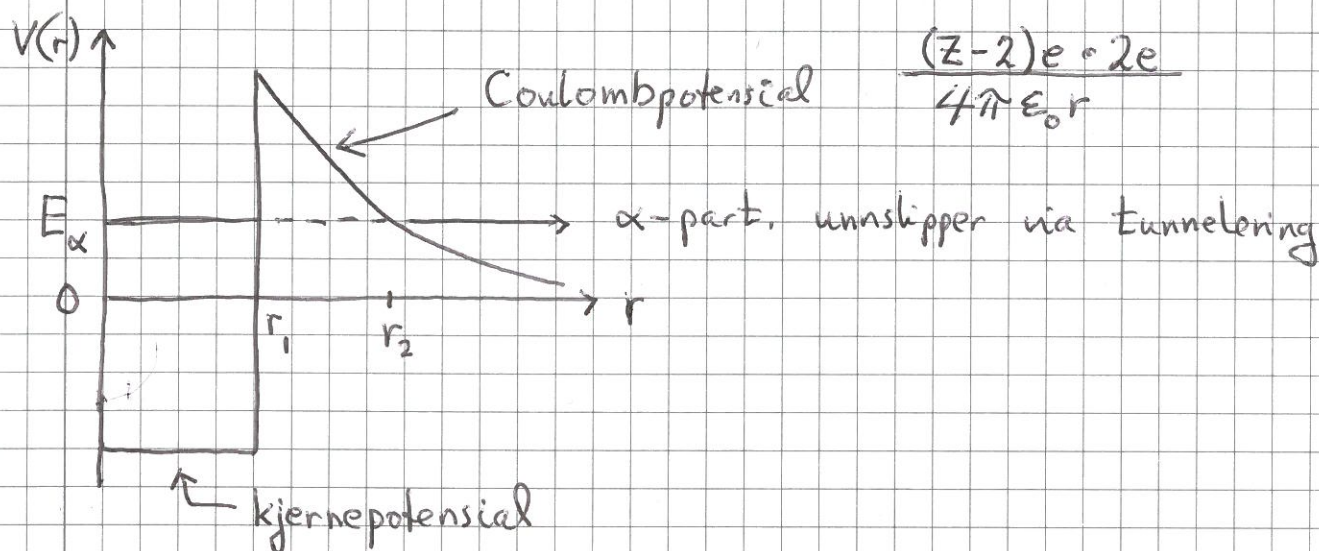


Kjernerreaksjoner

(72)

${}^4_2\text{He}^{2+}$ (= α -partikkel) som dannes i (stor) atomkjerne
følger sterkt tiltrekkende kjernekrefter og "relativt sterkt"
frastøtende Coulombkrefter.

Modellpotensial (Gamow 1928) :



Eks: ${}^{212}_{84}\text{Po} \rightarrow {}^{208}_{82}\text{Pb} + \alpha$; levetid ca $0.3 \mu\text{s}$; $E_\alpha \approx 9 \text{ MeV}$

$$Z=84, r_1 \approx 6 \text{ fm} \Rightarrow V(r_1) \approx 6.3 \cdot 10^{-12} \text{ J} \approx \text{39 MeV}$$

$$T \sim \exp \left\{ -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{V(r) - E_\alpha} dr \right\} ; V(r_2) = E_\alpha$$
$$\approx \exp \{ -44.4 \} \approx 5 \cdot 10^{-20}$$

$$v \approx \sqrt{2E_\alpha / m_\alpha} = 2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{t_{\text{kollisjon}}} = v / 2r_1 \approx 2 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}$$

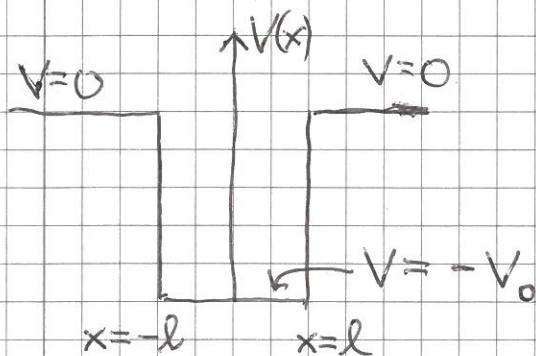
= antall ganger α -part. prøver å unnslippe pr sek.

$$\Rightarrow f \cdot T \approx 10^2 \text{ s}^{-1} = \text{unnslippsraten}$$

$$\Rightarrow \tau = 0.01 \text{ s} = \text{estimert levetid (der vi bommet med faktor ca } 10^5, \text{ pga manglende prefaktor i } T, \text{ og kanskje litt høy barriere)}$$

Deltafunksjonspotensial

[PCH 3.4; DJG 2.5; IØ 3.3] [PCH App B; IØ 2.4.f]



Grensetilfellet $V_0 \rightarrow \infty, l \rightarrow 0$ med endelig verdi for produktet $V_0 \cdot 2l$ ("dybde $\times$ bredde") kan beskrives med Diracs δ -funksjon, $\delta(x)$.

Definisjon: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$ ($f(x)$ kontinuerlig i $x=0$)

Med $f(x) = 1$: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

Kun $f(0)$ påvirker verdien av $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$

$\Rightarrow$ må ha $\delta(x) = 0$ når $x \neq 0$

Hvis $\delta(0) < \infty$, blir da $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 0$

$\Rightarrow$ må ha $\delta(0) = \infty$

Vilkan representere $\delta(x)$ med "normale funksjoner"

$\delta_\epsilon(x)$, og la $\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x)$.

Eks 1: $\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} 1/\epsilon & ; |x| \leq \epsilon/2 \\ 0 & ; |x| > \epsilon/2 \end{cases}$

Da er $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \infty & ; x=0 \\ 0 & ; x \neq 0 \end{cases}$, som påkrevd

og $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x) dx = \frac{1}{\epsilon} \cdot 2\epsilon/2 = 1$, — " —.

Eks 2:

Ex 2:

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi i x} \Big|_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{\pi x} \cdot \frac{1}{2i} (e^{ix/\varepsilon} - e^{-ix/\varepsilon})$$
$$= \frac{1}{\pi x} \cdot \sin(x/\varepsilon)$$

Oscillerer uendelig raskt når $\varepsilon \rightarrow 0$, unntatt "i $x=0$ ",
og $\delta_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} dx = \operatorname{sgn}(1/\varepsilon) = 1 \quad ; \text{ OK}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk}$$

Fourier-representasjon av $\delta(x)$

Flere egenskaper:

"Substituer" $x' = -x$: $dx' = -dx$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(-x') (-dx') = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(-x') dx' = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(-x) = \delta(x)} \quad \left(\Rightarrow \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i k x} dk \right)$$

Substituer $x' = |a|x \Rightarrow dx' = |a|dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x'}{|a|}\right) \delta(x') \frac{dx'}{|a|} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{1}{|a|} \delta(x)\right] dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(ax) = \delta(|a|x) = \frac{1}{|a|} \delta(x)}$$

$$3D: \int f(\vec{r}) \delta(\vec{r}) d^3r = f(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z) \delta(\vec{r}) dx dy dz = f(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(\vec{r}) = \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)}$$

Fysisk relevans av δ -funksjonen:

- Ladningstettheten $\rho(\vec{r})$ for en punktladning q i $\vec{r} = \vec{a}$:

$$\rho(\vec{r}) = q \cdot \delta(\vec{r} - \vec{a})$$

$$\Rightarrow \text{Total ladning: } Q = \int \rho(\vec{r}) d^3r = q \int \delta(\vec{r} - \vec{a}) d^3r = q; \text{ ok.}$$

[Tilsvarende med punktmasse, sevsagt]

- Kortvarig "puls" av et eller annet ved tidspunktet $T \sim \delta(t-T)$

δ -funksjonsnormering:

Fri partikkel med impuls p : $\psi_p(x) = C e^{ipx/\hbar}$

Ikke normerbar i "egentlig forstand":

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_p(x)|^2 dx = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$$

Men vi har ortogonalitet:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x) \psi_{p'}(x) dx &= |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p'-p)x/\hbar} dx \stackrel{(y=x/\hbar)}{=} \\ &= |C|^2 \hbar \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p'-p)y} dy = |C|^2 \hbar \delta(p'-p) \cdot 2\pi \end{aligned}$$

⇒ med $C = (2\pi\hbar)^{-1/2}$ har vi δ -funksjonsnormeringen

$$\left\{ \langle \Psi_p, \Psi_{p'} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_p^*(x) \Psi_{p'}(x) dx = \delta(p' - p) = \delta(p - p') \right\}$$

for tilstandene $\Psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$ i den kontinuerlige delen av energispekteret.

Tilbake til modellpotensialet, firkantbrønn med $V_0 \rightarrow \infty$, $l \rightarrow 0$, $\beta = V_0 \cdot 2l$ endelig. Kan ^{nå} skrives på formen

$$V(x) = -\beta \delta(x)$$

Merk at siden $\int \delta(x) dx = 1$, må enheten til $\delta(x)$ være $[x]^{-1}$, dvs $[\delta(x)] = 1/m$ når x er en lengde (posisjon).

Med $\beta = V_0 \cdot 2l$ blir dermed $[V(x)] = [V_0 \cdot 2l \cdot \delta(x)] = [V_0] \cdot m$

Når ~~for~~ $x \neq 0$ er $V(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Psi'' = E \Psi \Rightarrow \Psi'' = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi = \kappa^2 \Psi$$

med akseptabel løsning for $E < 0$ ($|\Psi|$ endelig; Ψ kontinuerlig)

$$\Psi(x) = \begin{cases} C e^{-\kappa x} & ; x > 0 \\ C e^{\kappa x} & ; x < 0 \end{cases}$$

"Tricks": Integrasjon av TUSL fra $-\varepsilon$ til $+\varepsilon$ og grensen $\varepsilon \rightarrow 0$ fastlegger κ , og dermed energien til den bundne tilstanden.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' + V(x)\psi = E\psi$$

(77)

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \psi' = \frac{2m}{\hbar^2} V(x)\psi - \frac{2m}{\hbar^2} E\psi$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d}{dx} \psi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (-\beta) \delta(x) \psi(x) dx}_{= -\frac{2m\beta}{\hbar^2} \psi(0)} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2m}{\hbar^2} E \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(x) dx}_{= 0}$$

$$= \psi'(0^+) - \psi'(0^-)$$

Indsættelse af $\psi(0) = C$, $\psi'(0^+) = -\hbar C$ og $\psi'(0^-) = \hbar C$

$$\Rightarrow -2\hbar C = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} C$$

$$\Rightarrow \hbar = \frac{m\beta}{\hbar^2} \Rightarrow E = -\frac{\hbar^2 \hbar^2}{2m} = -\frac{m\beta^2}{2\hbar^2}$$

Kun en bundet tilstand i δ -brønnen: Fra s. 56 har vi

$$\tan(\xi \cdot k_0 l) = \begin{cases} \sqrt{1-\xi^2}/\xi & (\text{Symm}) \\ -\xi/\sqrt{1-\xi^2} & (\text{Antisymm}) \end{cases}$$

for bundne løsninger. Her er $\xi = \sqrt{E/V_0} < 1$ og

$$k_0 l = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \sqrt{V_0} l = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{V_0 \cdot 2l}{V_0 \cdot 2} = \underbrace{\frac{\sqrt{2m}\beta}{2\hbar}}_{\text{endelig}} \cdot \frac{1}{V_0} \xrightarrow{V_0 \rightarrow \infty} 0,$$

så at 1. asymptote til $\tan(\xi \cdot k_0 l)$ ligger ved $\xi \rightarrow \infty$,
og dermed bare en symmetrisk bundet tilstand!

(Uanset "styrke" β på potentialet.)

Spredning på δ -potensialet er enkelt og litt pussig: (78)

$$x < 0: \psi = e^{ikx} + r e^{-ikx} \quad (\text{inn fra venstre; } E = \hbar^2 k^2 / 2m)$$

$$\psi' = ik(e^{ikx} - r e^{-ikx})$$

$$x > 0: \psi = t e^{ikx}$$

$$\psi' = ikt e^{ikx}$$

$$\psi \text{ kont. i } x=0 \Rightarrow 1+r=t$$

$$\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} \psi(0)$$

$$\Rightarrow ikt - ik(1-r) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} t$$

$$r=t-1 \Rightarrow ikt - ik(2-t) = -\frac{2m\beta}{\hbar^2} t$$

$$\Rightarrow 2ikt + \frac{2m\beta}{\hbar^2} t = 2ik$$

$$\Rightarrow t = (1 + m\beta / ik\hbar^2)^{-1}$$

$$\Rightarrow T = |t|^2 = (1 + (m\beta / k\hbar^2)^2)^{-1}$$

som med $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, dvs $k^2 = 2mE / \hbar^2$, gir

$$\underline{T(E) = (1 + m\beta^2 / 2E\hbar^2)^{-1}}; \quad \underline{R(E) = (1 + 2E\hbar^2 / m\beta^2)^{-1}}$$

Dvs T er uavhengig av fortegnet på β

$\Rightarrow$ samme T for brønn og barriere med gitt styrke β !