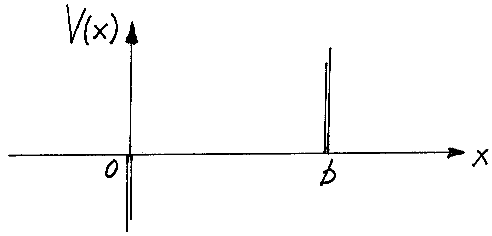
ØVING ????????? (nr 4 i F4250)

Oppgave ?????? − 1 Elektron i potensial med to δ-funksjoner



Et elektron befinner seg i et endimensjonalt potensial som består av en deltabrønn og en delta-barriere:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m_e a_0}\, g\delta(x) + \frac{\hbar^2}{m_e a_0}\, f\delta(x-b).$$

Her er $g > 0$, $f > 0$ og $b \geq 0$.

a. ♠Hvilken vei "knekker" en energiegenfunksjon ψ ved brønnen (mot aksen eller bort fra den), og hvilken vei "knekker" den ved barrieren? [Hint: Tenk på delta-brønnen som en veldig dyp og veldig trang brønn, og finn ut hvordan ψ da må krumme.] ♠Hvorfor må en egenfunksjon ψ for en bunden tilstand for dette systemet krumme utover fra aksen unntatt i origo?

b. La oss holde brønnstyrken g fast. For $f = 0$ følger det fra øving 3 at vi har én bunden tilstand, med energien $E = -g^2\hbar^2/(2m_e a_0^2)$. For økende barrierestyrke f ligger det i kortene at bindingsenergien til denne tilstanden avtar. Vi skal nå undersøke om det finnes en f-verdi som er så stor at denne tilstanden får energien $E = 0$. Denne tilstanden (ψ_0) må i så fall være lineær både for $x < 0$, $0 < x < b$ og $x > b$ (siden ψ_0'' er lik null i disse områdene når $E = 0$). ♠Hvorfor kan vi da like godt sette $\psi_0 = 1$ for $x < 0$? ♠Bruk diskontinuitetsbetingelsen oppgitt til slutt i denne oppgaven til å finne ψ_0' rett til høyre for brønnen, og finn $\psi_0(x)$ i området $0 < x < b$.

c. ♠Anta at $0 < b < a_0/2g$, og bruk diskontinuitetsbetingelsen i x=b til å finne den f-verdien som gjør at ψ_0 blir lik en konstant for $x > b$ (slik vi må forlange av en egenfunksjon med $E = 0$). Kall denne f-verdien for $f_0(b)$. ♠Se på $f_0(b)$ for tilfellene
(i) $b \to 0$,
(ii) $b = a_0/4g$,
(iii) $b \to a_0/2g$.

d. ♠Skissér ψ_0 f.eks for tilfellet $b = a_0/4g$. ♠Forklar hvorfor ψ_0 er grunntilstanden, slik at vi ikke har noen bundne tilstander for dette systemet. [Hint: Prøv å sette $\psi = e^{\kappa x}$ for $x < 0$, og finn ut hvordan denne løsningen må ta seg ut sammenlignet med ψ_0 etter hvert som du bruker bl.a skjøtebetingelsene til å "jobbe deg mot høyre". En skisse som viser hvordan ψ krummer sammenlignet med ψ_0 vil være til hjelp her.]

e. Vi har nå sett at dersom $0 < b < a_0/2g\,(\equiv b_0)$, kan vi "fjerne" den bundne tilstanden ved hjelp av delta-barrieren med styrken $f_0(b)$. For b større enn b_0 går ikke dette. Grunntilstanden blir da bunden selv om vi velger en uendelig stor barrierestyrke f. La oss regne på dette tilfellet, som er enklere enn når f er endelig. ♠Hva sier diskontinuitetsbetingelsen

$$\psi'(b^+) - \psi'(b^-) = \frac{2f}{a_0}\,\psi(b)$$

om $\psi(b)$ i grensen $f \to \infty$? ♠Hvorfor må grunntilstanden da få formen $C\sinh[\kappa(x-b)]$ i området $0 < x < b$? ♠Hva blir formen for $x < 0$? ♠Vis at κ (og dermed energien $E = -\kappa^2\hbar^2/(2m_e)$) bestemmes av betingelsen

$$\kappa b(\coth(\kappa b) + 1) = \frac{2gb}{a_0} \equiv \frac{b}{b_0}.$$

Denne betingelsen kan omformes til

$$1 - e^{-2\kappa b} = \frac{2\kappa b}{b/b_0}.$$

♠Skissér venstre og høyre side i denne ligningen (i samme diagram) som funksjoner av $2\kappa b$, og forklar hvorfor de to kurvene må skjære hverandre for et positivt argument $2\kappa b$ når $b > b_0$. [Hint: Se på de deriverte for $\kappa = 0$.]

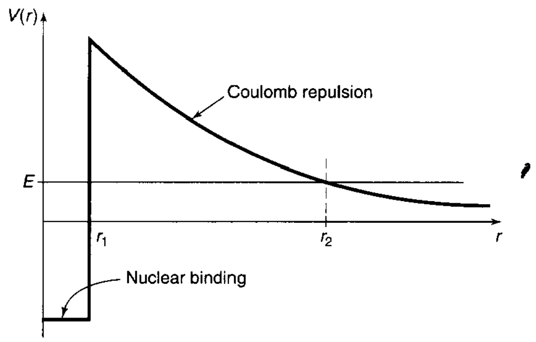
♠Sett $b = a_0/g = 2b_0$, bestem $2\kappa b$ numerisk, og finn forholdet mellom den resulterende energien og den grunntilstandsenergien vi har for $f = 0$ (jf pkt. **b**).

Oppgitt: Med $V(x) = \widetilde{V}(x) + \alpha\delta(x-c)$ (der $\widetilde{V}(x)$ er endelig) må en energiegenfunksjon oppfylle diskontinuitetsbetingelsen

$$\psi'(c^+) - \psi'(c^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\,\psi(c).$$

Oppgave ??????????? – 2 α-desintegrasjon

α-sdesintegrasjon er en prosess hvor en radioaktiv "opphavs"-kjerne (*parent nucleus*) desintegrerer (henfaller) til en "datter"-kjerne (*daughter nucleus*) og en α-partikkel (dvs en helium-kjerne, ${}^4_2\mathrm{He}^{++}$, med ladning $2e$).



Figuren viser potensialet mellom α-partikkelen og datter-kjernen (${}^A_Z\mathrm{X}$, med ladning Ze og nukleontall (massetall) A; merk at A og Z referer til *datter*-kjernen). Coulomb-delen av dette potensialleddet er

$$V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r}.$$

For en α-partikkel med energi E ser vi at dette potensialet utgjør en **Coulomb-barriere** som strekker seg fra kjerneradien $r_1 = (1.07\,\text{fm})A^{1/3}$ ut til den ytre venderadien r_2, som er gitt ved betingelsen

$$E = V(r_2) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r_2}.$$

Som nevnt i forelesningene (se også kapittel 8 i Griffiths), kan det vises at transmisjonskoeffisienten for denne barrieren er tilnærmet gitt ved

$$T \cong \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m[V(r)-E]}\,dr\right).$$

a. Bruk definisjonen av r_2 til å vise at potensialet $V(r)$ kan skrives som $V(r) = Er_2/r$ og bruk dette til å uttrykke $\ln T$ som

$$\ln T \cong -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\; r_2\int_{r_1/r_2}^{1}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx.$$

Fra forelesningene vet vi at det er viktig å finne ut *hvordan* $\ln T$ øker med avtagende E. En kjapp måte å bestemme verdien av integralet på (tilnærmet) er å merke seg at

$$I \equiv \int_{r_1/r_2}^{1}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx = \int_0^1\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx - \int_0^{r_1/r_2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\,dx.$$

Det første integralet på høyresiden er $\frac{1}{2}\pi$. (Det kan du lett sjekke ved et enkelt variabelbytte; $x = \cos^2 y$). I det andre integralet kan vi tilnærmet erstatte $\frac{1}{x}-1$ med $1/x$, siden $x < r_1/r_2 << 1$. <u>Tilnærmet</u> finner vi altså for integralet I

$$I \cong \tfrac{1}{2}\pi - \int_0^{r_1/r_2} x^{-1/2}dx = \tfrac{1}{2}\pi - 2\sqrt{r_1/r_2}.$$

(Med det samme variabelbyttet kan en vise at den <u>eksakte</u> verdien av integralet er $\arccos\sqrt{r_1/r_2} - \sqrt{r_1/r_2(1-r_1/r_2)}$; se avsnitt 8.2 i Griffiths.)

b. Bruk det *tilnærmede* resultatet for integralet ovenfor til å vise at logaritmen av transmisjonskoeffisienten kan skrives som

$$\ln T \cong -2\left[K_1\,\frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Zr_1}\right],$$

hvor

$$\begin{aligned} K_1 &\equiv \pi\,\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\sqrt{2mc^2} = 1.979(\text{MeV})^{1/2}, \\ K_2 &\equiv 4\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}}\sqrt{\frac{mc^2}{\hbar c}} = 1.485\,\text{fm}^{-1/2}. \end{aligned}$$

[I kjernefysikk bruker en **atommasse-enheten** u= $931.49432\,$MeV/c^2, som er en brøkdel $\frac{1}{12}$ av massen til karbonisotopen ^{12}C. Massen til et helium-4-atom er 4.002603 u. Massen til α-partikkelen er dermed $(4.002603 \times 931.49432 - 1.022)$ MeV/c^2=3727.378 MeV/c^2. Du får også bruk for $\hbar c = 1.9735 \times 10^8$ eV fm.]

c. Anta at α-partikkelen med sikkerhet (sannsynlighet = 1) befinner seg i kjernen ved tiden $t = 0$. For hver kollisjon med kjerneoverflaten reduseres denne sannsynligheten med en faktor $1 - T$, der T er transmisjonskoeffisienten. Med tidsintervallet t_1 mellom hver kollisjon er antall kollisjoner etter en tid t lik t/t_1. Sannsynligheten for at α-partikkelen fortsatt befinner seg i kjernen ved tiden t er derfor

$$P(t) = (1 - T)^{t/t_1} \approx e^{-Tt/t_1}.$$

Forklar hvorfor den siste overgangen er en svært god tilnærmelse når $T \ll 1$, som her. [Merk at $e^{-x} = 1 - x + x^2/2 + \cdots$.] Finn levetiden τ uttrykt ved T og t_1, og uttrykk sannsynligheten ovenfor ved τ. Merk at levetiden pr def er den tiden det tar før sannsynligheten P er redusert med en faktor $1/e$.

d. Bruk tilnærmingsformelen i pkt **b** (og resultatet ovenfor) til å beregne den teoretiske levetiden (τ) for (*opphavs*-)kjernene

$${}^{212}_{84}\mathrm{Po} \qquad (\text{med} \quad E \approx 8.9\,\mathrm{MeV} \text{ for } \alpha\text{-partikkelen}) \quad \text{og}$$

$${}^{232}_{90}\mathrm{Th} \qquad (\text{med} \quad E \approx 4.1\,\mathrm{MeV} \text{ for } \alpha\text{-partikkelen}).$$

[NB! Husk at datterkjernen har to protoner mindre enn opphavskjernen.] Sammenlign forholdet mellom disse *beregnede* levetidene med forholdet mellom de *målte* halveringstidene, som er

$$\frac{\tau_{1/2}({}^{232}\mathrm{Th})}{\tau_{1/2}({}^{212}\mathrm{Po})} \cong \frac{1.40 \times 10^{10}\mathrm{y(ears)}}{3 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}}.$$

[Hint: Anta at $t_1 = 2r_1/v$, og bruk for enkelhets skyld $v = \sqrt{2E/m}$. Det kan være lurt å regne ut t_1 separat, for å ha bedre styr på numerikken.]