

ØVING 1

En liten briefing om forventningsverdier, usikkerheter osv

Eksempel: Terningkast

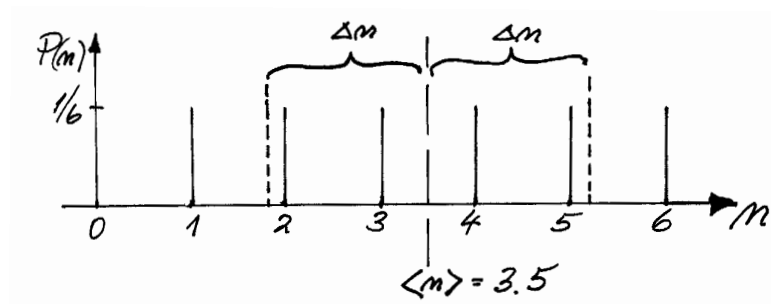
Ved terningkast er sannsynlighetene for å få 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 like store:

$$P(1) = P(2) = \dots = P(6) = 1/6.$$

Gjennomsnittsverdien \bar{n} ved et stort antall kast vil da nærme seg den teoretiske **forventningsverdien**, som er

$$\langle n \rangle = \sum_{n=1}^6 nP(n) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \frac{1}{6} = 3.5.$$

Som illustrert i figuren svarer $\langle n \rangle$ til “tyngdepunktet” av sannsynlighetsfordelingen (som i dette tilfellet er diskret).



Figuren illustrerer videre **usikkerheten** (også kalt standardavviket) Δn , som pr definisjon er

roten av det midlere kvadratiske avviket,

på engelsk kalt “root-mean-square deviation” (rms-avviket). Vi har altså oppskriften

$$\Delta n = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle}_{\text{dev}}}_{\text{square}}}_{\text{mean}}}_{\text{root}}.$$

Da

$$(\Delta n)^2 = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle = \langle n^2 - 2\langle n \rangle n + \langle n \rangle^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2,$$

kan usikkerheten generelt skrives på to måter (du bør memorere begge disse):

$$\Delta n = \sqrt{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}.$$

Her kan vi nå regne ut

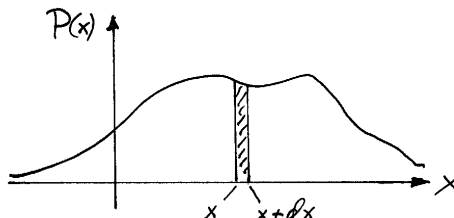
$$\langle n^2 \rangle = \sum_{n=1}^6 n^2 P(n) = (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + 6^2) \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Dermed blir usikkerheten i n (altså roten av det midlere kvadratiske avviket fra middelveiden ved et terningkast)

$$\Delta n = \sqrt{91/6 - 3.5^2} \approx 1.71.$$

(Se figuren på første side.)

Kontinuerlig sannsynlighetsfordeling



Figuren illustrerer en kontinuert sannsynlighetsfordeling, hvor x f.eks kan være posisjonen til en partikkel, og

$$P(x)dx = |\psi(x)|^2 dx$$

kan være sannsynligheten for å finne partikkelen i intervallet $[x, x + dx]$. Da kaller vi $P(x)$ for en sannsynlighetstetthet (sannsynlighet pr lengde-enhet blir det i dette endimensjonale eksemplet). Siden partikkelen har en eller annen posisjon, skal den totale sannsynligheten være lik 1:

$$\int P(x)dx = 1. \quad (\text{normering})$$

Forventningsverdien av posisjonen (tyngdepunktet av fordelingen) finner vi slik (analogt med beregningen av $\langle n \rangle$ på forrige side):

$$\langle x \rangle = \int xP(x)dx.$$

Videre er

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 P(x)dx,$$

osv. Fra disse kan vi finne usikkerheten $\Delta x = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2}$.

Oppgave 1

Betrakt (den endimensjonale) bølgefunksjonen $\Psi(x, t) = A e^{-\lambda|x|} e^{-i\omega t}$, hvor A , λ og ω er reelle, positive konstanter (og $-\infty < x < \infty$). Ifølge Borns sannsynlighetstolkning er $|\Psi(x, t)|^2 dx$ sannsynligheten for å finne partikkelen i intervallet $(x, x + dx)$, forutsatt at Ψ er normert.

a. Skissér $|\Psi(x, t)|^2$ som funksjon av λx . Bestem normeringskonstanten A .¹ [Hint: Både bølgefunksjonen og sannsynlighetstettheten er symmetrisk med hensyn på origo, så integrasjonen kan forenkles.]

¹Merk at for $n \geq 1$ følger det ved delvis integrasjon at

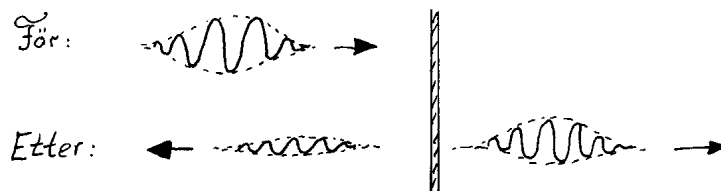
$$I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = [x^n (-e^{-x})]_0^\infty - \int_0^\infty n x^{n-1} (-e^{-x}) dx = n I_{n-1}.$$

b. Finn forventningsverdiene av x og x^2 , dvs $\langle x \rangle$ og $\langle x^2 \rangle$.

c. Finn usikkerheten for x ($\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$). Merk av punktene $\langle x \rangle - \Delta x$ og $\langle x \rangle + \Delta x$ i skissen for $|\Psi(x, t)|^2$, for å illustrere hvordan Δx representerer “spredningen” i x . Hva er sannsynligheten for å finne partikkelen utenfor (usikkerhets-)intervallet mellom de to punktene?

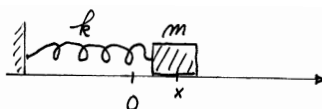
Oppgave 2 Fotoner mot et vindu

En elektromagnetisk bølgepakke — bygd opp ved superposisjon av planbølger med frekvenser ν i et lite intervall fra $\nu_0 - \Delta\nu$ til $\nu_0 + \Delta\nu$ — faller inn mot et butikkvindu. Ved hjelp av Maxwells ligninger, med dertil hørende grensebetingelser, samt brytningsindeksen $n(\nu_0)$ for glasset, kan en regne ut at bølgepakken ved møtet med vinduet deler seg i en reflektert pakke og en transmittert pakke.



La oss si at energi-innholdet i den reflekterte pakken er 4% av energien i den innkommende pakken, og se bort fra absorpsjon i glasset. — Hva skjer når ett enkelt foton med energi $h\nu_0$ sendes inn mot butikkvinduet? [Hint: Hent inspirasjon fra diskusjonen av dobbeltspalt-eksperimentet med lys; se Tillegg 1.]

Oppgave 3 Grunntilstand og 1. eksiterte tilstand for harmonisk oscillator



Det fysiske systemet vi tenker på i denne oppgaven er en endimensjonal harmonisk oscillator: En partikkel med masse m , påvirket av kraften $F_x = -kx$. Dette svarer til et potensial (\equiv potensiell energi) $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 \equiv \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, der $\omega = \sqrt{k/m}$ er vinkelfrekvensen for den klassiske harmoniske svingningen.

I den kvantemekaniske behandlingen av oscillatoren spør en først etter *egenfunksjonene* $\psi_n(x)$ til Hamilton-operatoren for oscillatoren,

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{p}_x^2}{2m} + V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

dvs funksjoner som oppfyller egenverdiligningen $\widehat{H}\psi = E\psi$, der E er en konstant som vi tolker som en energi-egenverdi.

Da $I_0 = 1$, innser vi herav at

$$I_n \equiv \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \quad \text{og} \quad I_n(\alpha) \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}; \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

a. Hamilton-operatoren \widehat{H} har én egenfunksjon på formen

$$\psi_0(x) = C_0 e^{-\beta x^2}.$$

Bestem β og energieigenverdien E_0 . [Hint: Begge disse størrelsene bestemmes ved innsetting i egenverdiligningen. Av de to løsningene for β gir bare den ene en bølgefunksjon som gir en fysisk akseptabel sannsynlighetstetthet. Hvorfor?]

b. Bestem konstanten C_0 slik at $\psi_0(x)$ er normert.² (Merk at du kan *velge fasen* til C_0 fritt, f.eks slik at C_0 blir reell og positiv.) Lag en rask skisse av sannsynlighetstettheten $|\psi_0(x)|^2$, og merk av de *klassiske vendepunktene* for partikkelen, dvs de punktene hvor $E = V$ for den aktuelle energien. Anslå ut fra skissen sannsynligheten for å finne partikkelen i det *klassisk forbudte området*, dvs der hvor $V(x) > E_0$.

c. Vi skal senere vise at egenfunksjonen $\psi_0(x)$ svarer til *grunntilstanden* (tilstanden med lavest mulig energi) for oscillatoren. Egenfunksjonen som svarer til den nest laveste energien viser seg å være

$$\psi_1(x) = C_1 x e^{-\beta x^2}.$$

Finn den tilsvarende energieigenverdien E_1 .

Oppgave 4 Grunntilstanden i H-atomet

a. Vis at den kulesymmetriske bølgefunksjonen

$$\psi(\mathbf{r}) = C e^{-r/a_0} \quad \left(a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \right)$$

er en egenfunksjon til Hamilton-operatoren

$$\widehat{H} = \widehat{K} + V = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

for hydrogenatomet [dvs vis at $\widehat{H}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$], og påvis at egenverdien E (energi-egenverdien) er som angitt i ligning (T1.26) i Tillegg 1. Laplace-operatoren i kulekoordinater er

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$

b. Vis at når $\psi(\mathbf{r})$ er en energieigenfunksjon med energien E , slik vi fant ovenfor, så er

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

en løsning av den tidsavhengige Schrödingerligningen for H-atomet,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi.$$

c. Vis at $C = (\pi a_0^3)^{-1/2}$ gir en normert bølgefunksjon.

²Oppgitt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha}$$

.