TFY4215 Innføring i kvantefysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 7.

Oppgave 1
Vendepunkter $\tilde{r}$ der elektronets energi E er lik det effektive potensialet

$$V_{\text{eff}}^{(l)}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m_e r^2}.$$

Med $l = 1$ og $E = -\alpha^2 m_e c^2/(2 \cdot 2^2)$:

$$-\alpha^2 m_e c^2/8 = -e^2/4\pi\varepsilon_0\tilde{r} + 2\hbar^2/2m\tilde{r}^2.$$

Denne ligningen kan omskrives til

$$\tilde{r}^2 - 8a_0\tilde{r} + 8a_0^2 = 0,$$

med løsningene

$$\tilde{r}_1 = (4 - 2\sqrt{2})a_0 \simeq 1.17a_0$$

og

$$\tilde{r}_2 = (4 + 2\sqrt{2})a_0 \simeq 6.83a_0,$$

hhv indre og ytre venderadius. Riktig svar: E.

Oppgave 2
Siden $Y_{11} \sim \sin\theta \exp(i\phi)$, er ρ_{211} maksimal for $\theta = \pi/2$, dvs i xy-planet. Maksimal R_{21} for r som oppfyller $\frac{d}{dr}(r\exp(-r/2a_0)) = 0$, dvs $r = 2a_0$. Dermed maksimal ρ_{211} på en sirkel med radius $2a_0$ i xy-planet.
Riktig svar: D.

Oppgave 3
Funksjonene $R_{21}(r)$ og $\sin\theta$ forblir uendret ved speiling gjennom origo, dvs $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$. Men $\exp(i\phi) \to \exp(i\phi)\cdot \exp(i\pi) = -\exp(i\phi)$, slik at funksjonen ψ_{211} har odde paritet, med egenverdi -1 for paritetsoperatoren.
Riktig svar: B.

Oppgave 4
Sannsynlighetstettheten ρ_{211} er proporsjonal med $\sin^2\theta$ og er dermed null på z-aksen.
Riktig svar: A.

Oppgave 5
$(R_{21}r)^2 \sim r^4\exp(-r/a_0)$, som er maksimal i $r = 4a_0$.
Riktig svar: D.

Oppgave 6
For å oppfylle utvalgsreglene $\Delta l = \pm 1$ og $\Delta m = 0, \pm 1$ for overganger fra tilstander ψ_{3lm} til ψ_{211} har vi 4 muligheter: ψ_{300}, ψ_{320}, ψ_{321} og ψ_{322}.
Riktig svar: D.

Oppgave 7
Starttilstanden $\Psi(x,0)$ er symmetrisk på intervallet $0 < x < L$. Dermed:

$$1 = 2\int_0^{L/2} \Psi^2(x,0)\,dx = 2A^2 \cdot (1/3) \cdot (L/2)^3 = A^2L^3/12,$$

slik at $A = 2\sqrt{3}/L\sqrt{L}$. Riktig svar: B.

Oppgave 8
$\Psi(x,0)$ ligner veldig på $\psi_1(x) = \sqrt{2/L}\sin(\pi x/L)$, så vi forventer at c_1 ikke er så mye mindre enn 1. De tre alternativene C, D og E er henholdsvis ca 0.14, 0.53 og 0.99, så vi mistenker at alternativ E er riktig.
La oss regne ut c_1. Siden $psi_1(x)$ er symmetrisk og reell, har vi

$$c_1 = 2\int_0^{L/2} \psi_1(x)\Psi(x,0)dx = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{L\sqrt{L}}\int_0^{L/2} x\sin(\pi x/L)dx.$$

Vi bruker delvis integrasjon og finner at integralet har verdien $(L/\pi)^2$, slik at $c_1 = 4\sqrt{6}/\pi^2$. Riktig svar: E.

Oppgave 9
$\psi_2(x)$ er antisymmetrisk på $(0,L)$, slik at $c_2 = 0$. Riktig svar: A.

Oppgave 10
Med c_1 bare litt mindre enn 1 blir $\langle E\rangle$ litt større enn E_1. Riktig svar: B.

Oppgave 11

$$\langle p\rangle_{t=0} = \int_0^L \Psi^*(x,0)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\Psi(x,0)dx = 0$$

siden integranden er antisymmetrisk. Symmetrien i problemet tilsier vel at dette ikke kan endre seg for $t > 0$ (?!) Riktig svar: C.

Oppgave 12
$K = 200$ keV $= 200\cdot 10^3\cdot 1.6\cdot 10^{-19}$ J $= 32$ fJ. (f = femto $= 10^{-15}$.) Riktig svar: D.

Oppgave 13
Elektroner har hvileenergi $E_0 = m_e c^2 \simeq 0.51$ MeV. Med kinetisk energi $K = 0.200$ MeV bør vi nok her regne relativistisk, og siden total energi, dvs summen av hvileenergi og kinetisk energi, er $E = \gamma m_e c^2$, er kinetisk energi $K = (\gamma - 1)m_e c^2$. Her er $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Vi løser med hensyn på v og finner at $v = c\left[1 - \left(1 + K/m_e c^2\right)^{-2}\right]^{1/2} = 0.695\,c$. Riktig svar: A.

Oppgave 14
$\lambda = h/p$ med (relativistisk) impuls $p = \gamma m v$. Med v fra forrige oppgave blir $\lambda = 2.5$ pm. Riktig svar: E.