NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN TEP4145 KLASSISK MEKANIKK
Mandag 21. mai 2007 kl. 0900 - 1300
Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

Vedlegg A: Oppgavene (Side 2 - 6).
Vedlegg B: Formler (Side 7).

Prøva består av 5 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderinga. Gjør oppgavene 1, 2 og 3, samt enten oppgave 4 (fysikk) eller oppgave 5 (teknisk kybernetikk).
Merk at Einsteins summekonvensjon, dvs summasjon over gjentatte indekser, benyttes, med mindre noe annet er spesifisert.

Sensuren kommer når den er klar, seinest 12. juni.

Vedlegg A: Oppgavene

OPPGAVE 1 [Teller 25%]

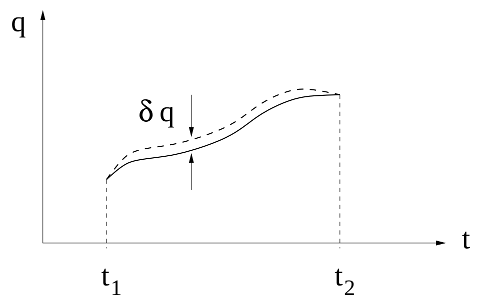
a) Utled Lagranges ligning,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

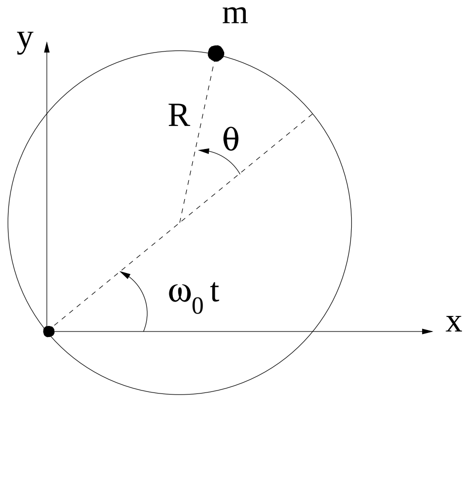
fra Hamiltons prinsipp

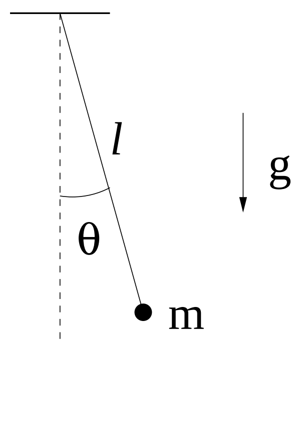
$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0.$$

for et system med en frihetsgrad. Her er det ingen variasjon i endepunktene, og virtuelle variasjoner i koordinaten q gjøres ved fast tid t, dvs $\delta t = 0$.



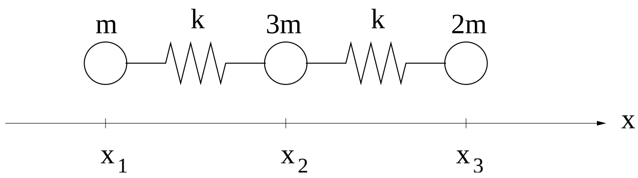
b) En punktformet masse m glir uten friksjon på en ring som roterer mot klokka i xy-planet med konstant vinkelhastighet ω_0. Ringen, som har radius R, roterer omkring et punkt på ringen. Dette punktet ligger fast i origo $x = y = 0$, som vist i figuren nedenfor (til venstre).
• Finn lagrangefunksjonen $L(\theta, \dot{\theta})$ til massen m.
• Finn Lagranges ligning, dvs bevegelsesligningen for massen m.
• Bevegelsesligningen ville bli den samme dersom massen m svingte fram og tilbake i enden av ei masseløs stang i tyngdefeltet (se figuren nedenfor, til høyre; tyngdens akselerasjon = g). Vis dette og bestem stangas lengde l.





OPPGAVE 2 [Teller 25%]

Tre kuler med masse henholdsvis m (kule nr 1, til venstre), $3m$ (kule nr 2, i midten) og $2m$ (kule nr 3, til høyre) er koblet sammen med to identiske (og ideelle) fjærer med fjærkonstant k, som vist i figuren:



Fjærene kan kun strekkes, ikke bøyes. Vi antar at kulene bare kan bevege seg langs x-aksen, og vi skal her betrakte oscillasjoner omkring kulenes likevektsposisjoner, som er henholdsvis x_{10}, x_{20} og x_{30}.

• Bruk kulenes utsving fra likevekt, $\eta_i = x_i - x_{i0}$ $(i = 1, 2, 3)$, som koordinater og bestem (de symmetriske) matrisene $\boldsymbol{V}$ og $\boldsymbol{T}$ i de kvadratiske uttrykkene

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} V_{ij}\, \eta_i\, \eta_j, \\ T &= \frac{1}{2} T_{ij}\, \dot{\eta}_i\, \dot{\eta}_j, \end{aligned}$$

for systemets potensielle og kinetiske energi. Her er V_{ij} og T_{ij} matriseelementer av henholdsvis $\boldsymbol{V}$ og $\boldsymbol{T}$.

• Løs den sekulære ligningen

$$\left| \boldsymbol{V} - \omega^2 \boldsymbol{T} \right| = 0,$$

og bestem derved systemets to egenfrekvenser $f_\alpha = \omega_\alpha / 2\pi$ $(\alpha = 1, 2)$. Finn tallverdier for f_α når $m = 100$ g og $k = 10^3$ N/m. (Se bort fra moden med $\omega = 0$, som tilsvarer ren translasjon av systemet.)

OPPGAVE 3 [Teller 25%.]

I denne oppgaven skal vi studere en kanonisk transformasjon $(q, p) \to (Q, P)$ av en enkel endimensjonal harmonisk oscillator ($i = \sqrt{-1}$):

$$\begin{aligned} Q(q,p) &= \frac{1}{\sqrt{2i}}\,(q + ip)\,, \\ P(q,p) &= \frac{-1}{\sqrt{2i}}\,(q - ip)\,. \end{aligned}$$

Vi setter for lettvinthets skyld $m = k = 1$ (m = massen og k = fjærkonstanten til oscillatoren).

• Hva er oscillatorens hamiltonfunksjon $H(q, p) = T + V$?

• Vis at den gitte transformasjonen $(q, p) \to (Q, P)$ *er* kanonisk. Tips: Benytt deg av at poissonklammer er invariante under en kanonisk transformasjon, for eksempel $[q, p] = [Q, P]$.

• Bestem hamiltonfunksjonen $K(Q, P)$ i de nye koordinatene Q, P. (Her er $K = H$.)

• Finn Hamiltons ligninger for Q og P og løs disse med startbetingelsene $q(t = 0) = p(t = 0) = 1$.

• Hva er oscillatorens totale energi?

OPPGAVE 4 [For fysikkstudentene, teller 25%.]

a) Den elektromagnetiske felttensoren $F_{\mu\nu}$ er definert ved

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Bestem elementene i matrisen $\boldsymbol{F}$ (dvs: uttrykt ved feltene $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$).

b) Vis at $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ er invariant under en lorentztransformasjon.

c) En punktladning q passerer origo ved tidspunktet $t = 0$ og beveger seg med konstant hastighet v i positiv x-retning. La oss kalle inertialsystemet hvor punktladningen er i ro for S_0 og inertialsystemet hvor punktladningen beveger seg med hastighet $v\hat{x}$ for S ($\hat{x}$ er enhetsvektor). Det oppgis at det elektriske feltet i avstand $\boldsymbol{r}$ fra punktladningen er

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

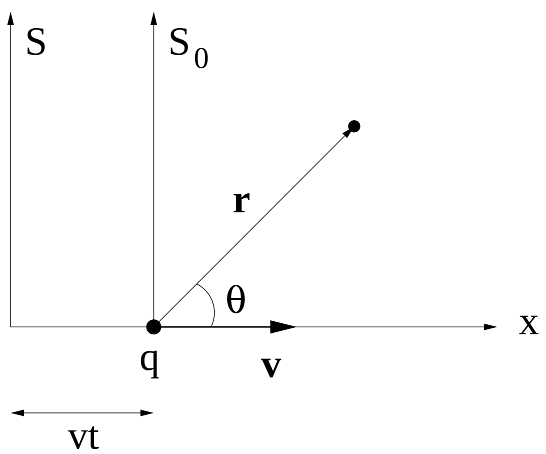
målt i S. Her angir θ vinkelen mellom x-aksen og $\boldsymbol{r}$, se figuren nedenfor, og $\beta = v/c$. Hva er magnetfeltet $\boldsymbol{B}_0$ målt i S_0? Vis at magnetfeltet, målt i S, kan skrives på formen

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}.$$

d) Hva blir magnetfeltet $\boldsymbol{B}$ i den ikkerelativistiske grensen $v \ll c$? Sammenlign resultatet med Biot-Savarts lov,

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Skisser feltlinjer for $\boldsymbol{B}$ i yz-planet.



OPPGAVE 5 [For kybernetikkstudentene, teller 25%.]

a) La oss ta utgangspunkt i hvordan antall individer i en dyrekoloni utvikler seg med tiden. Anta - enklest mulig - at bestanden vokser med en fast faktor hvert år, dvs. at det eksisterer en $\mu > 1$ slik at

$$b_{n+1} = \mu\, b_n,$$

der b_n er bestanden i år n og b_{n+1} er bestanden i år $n+1$. Hva slags ligning er dette, og hva er den generelle løsningen? Skriv ned en kort forklaring på hvorfor denne modellen er urealistisk.

b) En forbedret modell oppnås ved å la B være øvre estimat på antall dyr kolonien kan romme. Definer modellen ved at

$$b_{n+1} = \mu\, b_n \left(1 - \frac{b_n}{B}\right).$$

Vi innfører relativ bestand

$$x_n = \frac{b_n}{B},$$

og har da

$$x_{n+1} = \mu\, x_n\,(1 - x_n)\,.$$

Videre definerer vi

$$F_\mu(x) = \mu\, x\,(1 - x)\,,$$

som gir at

$$x_{n+1} = F_\mu(x_n).$$

Lag en enkel skisse av $F_\mu(x)$, og skriv ned koordinatene til topp-punktet. La x_0 være skjæringspunktet mellom grafen til $y = F_\mu(x)$ og grafen til $y = x$. Hva er da x_n som funksjon av x_0? Hva slags punkt er x_0?

c) Definer begrepet fikspunkt for en funksjon f. Definer begrepet periodisk punkt for en funksjon f, og gjør rede for begrepet grunnperiode for punktet. Forklar/definer tiltrekkende fikspunkt og frastøtende fikspunkt for en funksjon f.

d) Betrakt nå avslutningsvis

$$F_\mu(x) = \mu\, x\,(1 - x)\,.$$

Bestem de to fikspunktene til F_μ. La øvre skranke for μ være 3, og avgjør om fikspunktene er tiltrekkende eller frastøtende.

Vedlegg B: Formler

Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Hamiltons ligninger:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

- Poissonklammer:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$$

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$$

- Firervektor:

$$x_\mu = (\boldsymbol{r}, ict)$$

- Firerpotensial:

$$A_\mu = (\boldsymbol{A}, i\phi/c)$$

- Elektromagnetisk felt:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

- Lorentztransformasjon (med relativ hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$):

$$L_{22} = L_{33} = 1 \ , \ L_{11} = L_{44} = \gamma \ , \ L_{14} = -L_{41} = i\beta\gamma$$

$$\beta = v/c \quad , \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

- Lorentztransformasjon av elektromagnetisk felt (der inertialsystemet S_0 beveger seg med hastighet $v\hat{x}$ relativt til S):

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \quad , \quad E_y = \gamma(E_{0y} + vB_{0z}) \quad , \quad E_z = \gamma(E_{0z} - vB_{0y}) \\ B_x &= B_{0x} \quad , \quad B_y = \gamma(B_{0y} - \frac{v}{c^2}E_{0z}) \quad , \quad B_z = \gamma(B_{0z} + \frac{v}{c^2}E_{0y}) \end{aligned}$$

- Trigonometriske relasjoner:

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \end{aligned}$$