NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ENERGI- OG PROSESSTEKNIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I TEP4145 KLASSISK MEKANIKK
Mandag 21. mai 2007 kl. 0900 - 1300

Løsningsforslaget er på i alt 9 sider.

OPPGAVE 1 [Teller 25%]

a) Faste endepunkter gir

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L\, dt$$

Virtuelle variasjoner ved fast t (dvs $\delta t = 0$):

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta \dot{q}$$

Ombytte av δ og d/dt gir

$$\delta \dot{q} = \delta\, \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\, \delta q,$$

og dermed

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\, \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \frac{d}{dt}\, \delta q \right) dt$$

Delvis integrasjon på siste ledd:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \frac{d}{dt}\, \delta q\, dt = |_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, \delta q - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt$$

Her forsvinner første ledd fordi $\delta q = 0$ i endepunktene. Dermed:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt = 0$$

Ettersom δq er vilkårlig, må integranden forsvinne, dvs

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

som er Lagranges ligning.

b)

• Her er $V = 0$, så

$$L = T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right)$$

Vi ser fra figuren (neste side) at

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega_0 t + R \cos(\omega_0 t + \theta) \\ y &= R \sin \omega_0 t + R \sin(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\omega_0 \sin \omega_0 t - R(\omega_0 + \dot{\theta}) \sin(\omega_0 t + \theta) \\ \dot{y} &= R\omega_0 \cos \omega_0 t + R(\omega_0 + \dot{\theta}) \cos(\omega_0 t + \theta) \end{aligned}$$

Vi kvadrerer og legger sammen:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (R\omega_0)^2 + R^2(\omega_0 + \dot{\theta})^2 + 2R^2\omega_0(\omega_0 + \dot{\theta}) \left[\sin \omega_0 t \sin(\omega_0 t + \theta) + \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \theta) \right]$$

Deretter bruker vi trigonometriske relasjoner (gitt i formelvedlegget) og får

$$\begin{aligned}\sin\omega_0 t\sin(\omega_0 t+\theta)+\cos\omega_0 t\cos(\omega_0 t+\theta) &= \sin\omega_0 t\sin\omega_0 t\cos\theta+\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t\sin\theta+\\ &\quad \cos\omega_0 t\cos\omega_0 t\cos\theta-\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t\sin\theta\\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

Systemets lagrangefunksjon er dermed

$$L = mR^2\left[\omega_0^2+\omega_0\dot\theta+\frac{1}{2}\dot\theta^2+\omega_0(\omega_0+\dot\theta)\cos\theta\right]$$

Kommentar: Noen hadde oppfattet det slik at ringen også var plassert i tyngdefeltet. Det ble sett på med stor forståelse. Dog ville det da være på sin plass med en fornuftig kommentar når det ble problematisk å sammenligne ringen med pendelen.

• Vi må regne ut de ulike (partielle) deriverte av L:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\theta} &= -mR^2\omega_0(\omega_0+\dot\theta)\sin\theta\\ \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} &= mR^2\left[\omega_0+\dot\theta+\omega_0\cos\theta\right]\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta} &= mR^2\left[\ddot\theta-\omega_0\dot\theta\sin\theta\right]\end{aligned}$$

Lagranges ligning blir

$$\ddot\theta+\omega_0^2\sin\theta=0$$

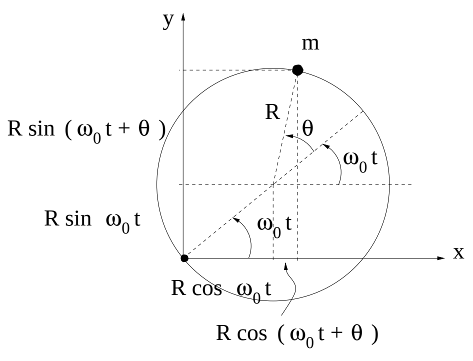
• Fra figuren (nedenfor) ser vi at tyngdekraftens komponent vinkelrett på pendelen er $-mg\sin\theta$. I følge Newtons 2. lov skal denne kraften være lik ma, der $a = l\ddot\theta$. Pendelens bevegelse beskrives dermed av ligningen

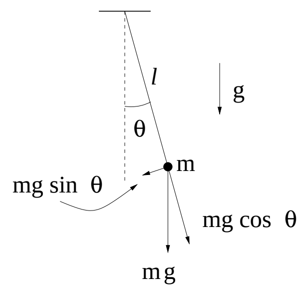
$$\ddot\theta+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

Samme oppførsel som massen på den roterende ringen dersom pendelen har lengde

$$l=\frac{g}{\omega_0^2}$$

Pendelproblemet kan selvsagt også løses med "Lagrange-teknikk".





OPPGAVE 2 [Teller 25%]

Sammenpressing i fjæra til venstre:

$$(x_1 - x_2) - (x_{10} - x_{20}) = \eta_1 - \eta_2$$

Sammenpressing i fjæra til høyre:

$$(x_2 - x_3) - (x_{20} - x_{30}) = \eta_2 - \eta_3$$

Strekk i fjærene blir tilsvarende, med motsatt fortegn.
Systemets potensielle energi blir

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k(\eta_1 - \eta_2)^2 + \frac{1}{2}k(\eta_2 - \eta_3)^2 \\ &= \frac{1}{2}k(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_1\eta_2 - \eta_2\eta_1 - \eta_2\eta_3 - \eta_3\eta_2) \end{aligned}$$

Matrisen $\boldsymbol{V}$ blir dermed

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

Systemets kinetiske energi er

$$T = \frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}m_i\dot{\eta}_i^2$$

Matrisen $\boldsymbol{T}$ blir dermed

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 3m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix}$$

Systemets egenfrekvenser bestemmes av den sekulære ligningen

$$\begin{vmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - 3\omega^2 m & -k \\ 0 & -k & k - 2\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

Stryker en felles faktor k^3 for hele determinanten og innfører

$$\alpha \equiv \frac{\omega^2 m}{k}$$

for å forenkle notasjonen litt. Det gir ligningen

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2 - 3\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1 - 2\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Utvikling etter for eksempel første rad gir

$$(1 - \alpha)(2 - 3\alpha)(1 - 2\alpha) - (1 - \alpha) - (1 - 2\alpha) = 0$$

dvs

$$6\alpha^3 - 13\alpha^2 + 6\alpha = 0$$

Vi ser bort fra moden med $\alpha = 0$ (som tilsvarer ren translasjon av hele systemet langs x-aksen). De to andre løsningene er

$$\alpha = \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 6 \cdot 6}}{2 \cdot 6} = \frac{13 \pm 5}{12}$$

dvs

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}$$

Dette tilsvarer frekvensene

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{k\alpha_1/m}}{2\pi} = \frac{\sqrt{2k/3m}}{2\pi} \simeq 13.0 \text{ Hz}$$

og

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{\sqrt{k\alpha_2/m}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3k/2m}}{2\pi} \simeq 19.5 \text{ Hz}$$

Kommentar: Vibrasjons-*bevegelsen* i hver av disse to normale modene kan bestemmes ved å regne ut de ulike underdeterminantene $\Delta_{i\alpha}$, dvs de ulike 2×2-determinantene som fås ved å "stryke" rekke nr i og kolonne nr α i $|\boldsymbol{V} - \omega_\alpha^2 \boldsymbol{T}|$ og multiplisere med $(-1)^{i+\alpha}$. Da vil utsvingsamplituden $A_{i\alpha}$ for masse nr i i mode nr α være proporsjonal med $(-1)^{i+\alpha}\,\Delta_{i\alpha}$. Uten at vi bryr oss om normeringen finner vi da, for mode nr 1 (med $\alpha_1 = 2/3$):

$$\boldsymbol{A}_1 = (A_{11}, A_{21}, A_{31}) = \left(-1, -\frac{1}{3}, 1\right)$$

og for mode nr 2 (med $\alpha_2 = 3/2$):

$$\boldsymbol{A}_2 = (A_{12}, A_{22}, A_{32}) = \left(-2, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

OPPGAVE 3 [Teller 25%.]

• Potensiell energi: $V = kq^2/2 = q^2/2$. Kinetisk energi: $T = mv^2/2 = p^2/2m = p^2/2$. Dette gir hamiltonfunksjonen

$$H(q,p) = V + T = \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right)$$

• Vi har åpenbart at $[q,p] = 1$, slik at vi må sjekke at $[Q,P] = 1$. De ulike partielle deriverte av de nye kanoniske koordinatene er

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{2i}} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{i}{\sqrt{2i}}$$
$$\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{-1}{\sqrt{2i}} \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{i}{\sqrt{2i}}$$

Dermed:

$$[Q,P] = \frac{1}{\sqrt{2i}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2i}} - \frac{-1}{\sqrt{2i}} \cdot \frac{i}{\sqrt{2i}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Her var det også andre varianter som førte fram.

• Regner først ut q og p uttrykt ved Q og P:

$$q = \sqrt{\frac{i}{2}}\,(Q - P) \quad , \quad p = \frac{1}{\sqrt{2i}}\,(Q + P)$$

Dermed blir hamiltonfunksjonen i nye koordinater

$$\begin{aligned} K = H &= \frac{1}{2}\left(q^2 + p^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{i}{2}\left(Q^2 - 2QP + P^2\right) + \frac{1}{2i}\left(Q^2 + 2QP + P^2\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2}\cdot(-4QP) \\ &= -iQP \end{aligned}$$

• Hamiltons ligninger blir:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial K}{\partial P} = -iQ \\ \dot{P} &= -\frac{\partial K}{\partial Q} = iP \end{aligned}$$

som har løsninger

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0\, e^{-it} \\ P(t) &= P_0\, e^{it} \end{aligned}$$

Med de gitte startbetingelsene $q(t=0) = p(t=0) = 1$ får vi

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2i}}\,(1 + i) = 1 \\ P(0) &= P_0 = \frac{-1}{\sqrt{2i}}\,(1 - i) = i \end{aligned}$$

altså

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{1 + i}{\sqrt{2i}}\, e^{-it} = e^{-it} \\ P(t) &= \frac{i - 1}{\sqrt{2i}}\, e^{it} = i\, e^{it} \end{aligned}$$

• Oscillatorens totale energi:

$$E = K = H = \frac{1}{2}\,(1 + 1) = 1$$

OPPGAVE 4 [For fysikkstudentene, teller 25%.]

a) Firerpotensialet er

$$A_\mu = (\boldsymbol{A}, i\phi/c)$$

mens feltene er relatert til A_μ slik:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Med andre ord:

$$E_j = -\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t}$$

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$

(osv syklisk for B_2 og B_3) Fra definisjonen

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

ser vi uten videre at $F_{\mu\mu} = 0$ og $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Det holder altså å regne ut de 6 elementene over (eller under) diagonalen:

$$\begin{aligned}
F_{12} &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\nabla \times \boldsymbol{A})_z = B_z = B_3 \\
F_{13} &= \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = -(\nabla \times \boldsymbol{A})_y = -B_y = -B_2 \\
F_{23} &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = (\nabla \times \boldsymbol{A})_x = B_x = B_1 \\
F_{14} &= \frac{\partial A_4}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} = \frac{i}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{ic\partial t} \\
&= -\frac{i}{c}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial t}\right) = -\frac{i}{c}E_1 \\
F_{24} &= \frac{\partial A_4}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} = \frac{i}{c}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{ic\partial t} \\
&= -\frac{i}{c}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial t}\right) = -\frac{i}{c}E_2 \\
F_{34} &= \frac{\partial A_4}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} = \frac{i}{c}\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{ic\partial t} \\
&= -\frac{i}{c}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial t}\right) = -\frac{i}{c}E_3
\end{aligned}$$

b) Transformasjonsligningene for E_j og B_j er gitt i formelvedlegget for relativ bevegelse langs x-aksen. Bruker disse og får:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} &= E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z \\
&= E_{0x} B_{0x} + \gamma^2 (E_{0y} + v B_{0z}) \left(B_{0y} - \frac{v}{c^2} E_{0z}\right) + \gamma^2 (E_{0z} - v B_{0y}) \left(B_{0z} + \frac{v}{c^2} E_{0y}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_{0x}B_{0x} + E_{0y}B_{0y}\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + E_{0z}B_{0z}\gamma^2\left(-\frac{v^2}{c^2}+1\right) + \\
&\quad E_{0y}E_{0z}\left(-\gamma^2\frac{v}{c^2}+\gamma^2\frac{v}{c^2}\right) + B_{0y}B_{0z}\left(\gamma^2 v - \gamma^2 v\right) \\
&= E_{0x}B_{0x} + E_{0y}B_{0y}\cdot 1 + E_{0z}B_{0z}\cdot 1 \\
&= \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0
\end{aligned}
$$

som var det vi skulle vise.

c) I inertialsystemet S_0 er ladningen i ro, så der er $\boldsymbol{B}_0 = 0$. Da gir transformasjonsligningene

$$B_x = 0 \quad , \quad B_y = -\gamma\frac{v}{c^2}E_{0z} \quad , \quad B_z = \gamma\frac{v}{c^2}E_{0y}$$

og dessuten

$$E_y = \gamma E_{0y} \quad , \quad E_z = \gamma E_{0z}$$

Dermed:

$$B_y = -\frac{v}{c^2}E_z \quad , \quad B_z = \frac{v}{c^2}E_y$$

Hastigheten er

$$\boldsymbol{v} = v\,\hat{x}$$

slik at vi kan skrive

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_x = 0 \quad , \quad (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_y = -v\,E_z \quad , \quad (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})_z = v\,E_y$$

Ved sammenligning ser vi da at vi har

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}$$

d) I den ikkerelativistiske grensen $v \ll c$ ($\beta \ll 1$) reduserer uttrykket for $\boldsymbol{E}$ (gitt i oppgaveteksten under punkt *c*) seg til

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Magnetfeltet blir da

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

Vi kan skrive $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{l}/dt$, dvs ladningen forflytter seg et veielement $d\boldsymbol{l}$ i løpet av en tid dt. Da har (den midlere) strømmen på dette veielementet vært $I = q/dt$, så vi kan skrive

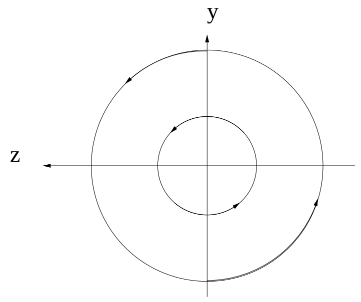
$$q\,\boldsymbol{v} = \frac{q}{dt}\,d\boldsymbol{l} = I\,d\boldsymbol{l}$$

og dermed

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3},$$

som er Biot-Savarts lov.

Feltlinjer for $\boldsymbol{B}$ i yz-planet:



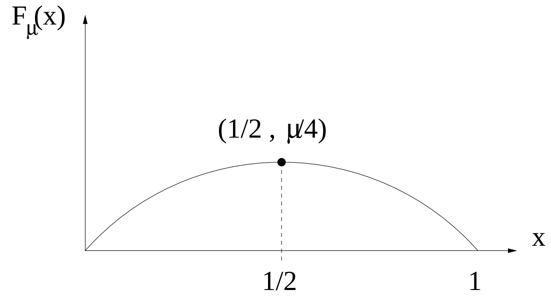
OPPGAVE 5 [For kybernetikkstudentene, teller 25%.]

a) Dette er en førsteordens lineær differensligning. Den generelle løsningen er

$$b_n = \mu^n \, b_0.$$

Modellen er urealistisk fordi veksten er eksponensiell, uten noen øvre grense.

b) Skisse av funksjonen $F_\mu(x)$:



Vi får $x_n = x_0$ for alle n. Punktet x_0 blir et *likevektspunkt* for bestanden. (x_0 er også et *fikspunkt*.)

c) x er et fikspunkt for f dersom $f(x) = x$. Dersom $f^{(n)}(x) = x$, sier vi at x er periodisk med periode n. Hvis $f^{(k)}(x) \neq x$ for alle k, $1 \leq k < n$, så er n grunnperioden til x.
Et fikspunkt x kalles tiltrekkende dersom $|f'(x)| < 1$. Punkter nær x vil da gå mot x.
Et fikspunkt x kalles frastøtende dersom $|f'(x)| > 1$. Punkter nær x vil da fjerne seg fra x.

d) Fikspunkter for $F_\mu(x)$:

$$x = 0 \quad , \quad x = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Vi har at

$$F'_\mu(0) = \mu \quad , \quad F'_\mu\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = 2 - \mu$$

For $1 < \mu < 3$ har vi dermed et frastøtende fikspunkt i $x = 0$ og et tiltrekkende fikspunkt i $x = (\mu - 1)/\mu$.