KAP. 1 : FUNDAMENTALE PRINSIPPER

Hastighetsvektor : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Lineær impuls : $\vec{p} = m\vec{v}$

Total kraft : $\vec{F}$ (gravitasjon, elektrodynamisk etc.)

Newtons 2. lov : $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$; gjelder i <u>inertialsystem</u>

Hvis konstant masse m : $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

Når Newtons 2. lov gjelder, har vi et <u>inertialsystem</u> (= Galileisk system)

Bevaringslov for lineær impuls: Hvis $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ bevart

Dreieimpuls omkring origo : $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Kraftmoment —— " —— : $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{r}\times\vec{p})}_{\vec{L}} - \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}}_{\vec{v}\times m\vec{v} = 0}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Bevaringslov for dreieimpuls : Hvis $\vec{N} = 0$, er $\vec{L}$ bevart

<u>Arbeid</u> utført av ytre kraft $\vec{F}$ når partikkelen går fra 1 til 2 :

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Anta m = konstant : $\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = m\int \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d}{dt}v^2\,dt$

$$\Rightarrow W_{12} = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \equiv T_2 - T_1$$

(= endring i kinetisk energi)

Konservativt system: W_{12} den samme for alle veier $1 \to 2$

Kan uttrykkes slik: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ (utelukker friksjon; vil alltid gi positiv $\vec{F} \cdot d\vec{s}$)

$\Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$; V = potensial (potensiell energi)

Nullnivået for V er vilkårlig

For konservativt system: $W_{12} = V_1 - V_2$

Fra før: $W_{12} = T_2 - T_1$

$$\left.\begin{aligned} W_{12} &= V_1 - V_2 \\ W_{12} &= T_2 - T_1 \end{aligned}\right\} \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Dvs: For konservativt system er total partikkelenergi $T+V$ bevart

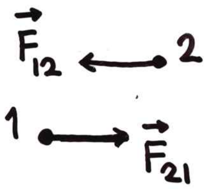
1-2: Systemer med flere partikler

Newtons 2. lov for partikkel i: $\sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} = \dot{\vec{p}}_i$

$\vec{F}_i^{(e)}$: ytre kraft

$\vec{F}_{ji}$: indre kraft på partikkel i pga. partikkel j $(\vec{F}_{ii} = 0)$

Antar at $\vec{F}_{ij}$ oppfyller Newtons 3. lov: Kreftene to partikler utøver på hverandre er like store og motsatt rettet



("svak lov om aksjon og reaksjon")

Summerer over alle partikler i:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{\substack{\vec{F}^{(e)} \\ \text{total ytre kraft}}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji}}_{=0}$$

Definerer massesentrets posisjon $\vec{R}$, (= CM, "center of mass")

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad , \quad \text{og får :}$$

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}$$

dvs: CM beveger seg som om all masse var konsentrert i CM

Total impuls : $\vec{P} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{R}}{dt}$

Bevaringslov for total impuls til et system av partikler: Hvis $\vec{F}^{(e)} = 0$, er $\vec{P}$ bevart. (Krever svak lov om aksjon/reaksjon.)

Total dreieimpuls: $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i \qquad \left(\text{da } \sum_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \frac{\vec{p}_i}{m_i} \times \vec{p}_i = 0 \right)$$

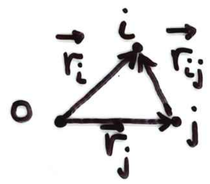
Innsetting av Newtons 2. lov, $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{F}_{ji}$, gir

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

Siste ledd kan skrives som sum over par av formen

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} \qquad \text{fordi } \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Med $\vec{r}_i - \vec{r}_j \equiv \vec{r}_{ij}$ kan vi skrive



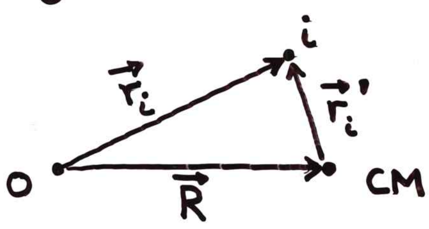
$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji}$$

Hvis andre kraft mellom i og j ligger langs forbindelseslinjen ("sterk lov om aksjon og reaksjon"), vil alle $\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}^{(e)} \quad ; \quad \vec{N}^{(e)} = \text{ytre dreiemoment}$$

Bevaringslov for total dreieimpuls til et system av partikler: Hvis $\vec{N}^{(e)} = 0$, er $\vec{L}$ bevart. (Sentrale krefter forutsatt.)

Omskrivning av $\vec{L}$:



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$$
$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i'$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{R} + \vec{r}_i') \times m_i(\vec{v} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_i \vec{R} \times m_i \vec{v} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' + \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right)}_{=0} \times \vec{v} + \vec{R} \times \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i'}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{R} \times M\vec{v} + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{p}_i'$$

Dvs: Dreieimpulsen om O er lik dreieimpulsen av systemet konsentrert i CM pluss dreieimpulsen omkring CM. Dersom $\vec{R}$ ligger fast i forhold til O ($\vec{v} = 0$), er $\vec{L}$ lik dreieimpulsen omkring CM og uavhengig av referansepunkt.

Energi:

Arbeid utført når systemet flyttes fra 1 til 2:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s}_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i$$

La oss se på "venstre" side, med $\vec{F}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i$ og $d\vec{s}_i = \vec{v}_i \, dt$:

(Omforming av høyre side ikke pensum; Goldstein s. 10-11)

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i \, dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\tfrac{1}{2} m_i v_i^2\right) = T_2 - T_1 \quad \text{(som før!)}$$

der $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$

Kan igjen dele opp i "CM-del" og "indre del":

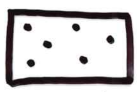
$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{v} + \vec{v}_i{}') \cdot (\vec{v} + \vec{v}_i{}')$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i v^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i{}'}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{T = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2}$$

1-3: Føringer

Eksempler:



gass i beholder

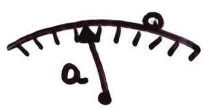
Klassifisering:

Holonome føringer: $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$

Eks: Fast legeme, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$

Ikke-holonome føringer: ikke mulig å formulere som $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$

Eks:



$r^2 - a^2 \geq 0$

Videre klassifisering:

Rheonome føringer er tidsavhengige

Skleronome —— " —— tidsuavhengige

Generaliserte koordinater:

N partikler har 3N uavhengige koordinater, evt. 3N frihetsgrader

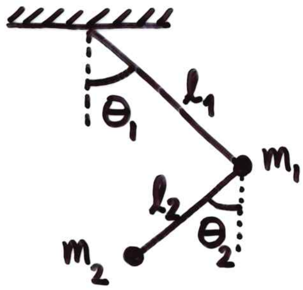
Med k holonome føringsbetingelser fås 3N-k frihetsgrader

Innfører nye uavhengige koordinater $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$ slik at

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$$
$$\vdots$$
$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(\text{———} \text{ " } \text{———})$$

Føringsbetingelsene er implisitt inneholdt i disse transformasjonsligningene.

Eks: Dobbeltpendel; bevegelse i ett plan



Generaliserte koord. er θ_1, θ_2.

To partikler ⇒ i utgangspunktet 6 frihetsgrader

Bevegelse i ett plan gir én føringsbet. pr partikkel

Konstante stavlengder ℓ_1 og ℓ_2 gir ytterligere to føringsbet.

$\Rightarrow$ # frihetsgrader $= 6 - 4 = 2$

1-4 : D'Alemberts prinsipp og Lagranges ligninger

Virtuell forskyvning : en infinitesimal forskyvning av systemets koordinater, $\delta\vec{r}_i$, i overensstemmelse med evt. føringsbetingelser. Krefter og føringsbet. endres ikke.

Anta først system i likevekt : alle $\vec{F}_i = 0$ $\;\therefore\; \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$

Spalt opp $\vec{F}_i$ i påtrykt kraft $\vec{F}_i^{(a)}$ og føringskraft $\vec{f}_i$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$

Anta $\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ (Friksjon utelates)

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$ "Prinsippet om virtuelt arbeid"

Merk at generelt er $\vec{F}_i^{(a)} \neq 0$ siden $\delta\vec{r}_i$ generelt ikke alle er uavhengige (pga. føringsbet.)

Ser så på system i bevegelse : $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0$

Analogt med det statiske tilfellet ; $-\dot{\vec{p}}_i$ = "effektiv motkraft"

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \;\; ; \;\; \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i}_{\text{antas} = 0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$$ D'Alemberts prinsipp

Har oppnådd å eliminere føringskreftene ; dropper heretter (a)

Antar holonomt system og innfører uavhengige koordinater q_i :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots\dots, q_n, t)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_i \equiv \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \vec{v}_i(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Den virtuelle forskyvningen: $\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$ [δt ikke involvert her; virtuell forskyvn. vedrører bare koordinatforskyvn. δq_j]

Ser på 1. ledd i "D'Alemberts prinsipp":

$$\sum_i \vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i,j}\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \equiv \sum_j Q_j\,\delta q_j$$

Generalisert kraft: $Q_j = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$

$[Q_j\,\delta q_j] = [\text{arbeid}]$

Deretter 2. ledd:

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i\cdot\delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

Her er $\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i\left\{\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i\dot{\vec{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right\}$

Kan bytte om $\frac{d}{dt}$ og $\frac{\partial}{\partial q_j}$ i siste ledd:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_k\frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2\vec{r}_i}{\partial q_j\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_j}\vec{v}_i = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_k\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Ser også at $\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$ Innsetting gir da:

$$\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i\left\{\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial\dot{q}_j}\right) - m_i\vec{v}_i\cdot\frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}\right\}$$

$$= \sum_i\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j}\left(\tfrac{1}{2}m_iv_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\tfrac{1}{2}m_iv_i^2\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Dermed kan vi skrive D'Alemberts prinsipp slik:

$$\sum_j\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0$$

Holonome føringsbet. $\Rightarrow$ δq_j uavhengige $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad (n \text{ 2.ordens ligninger})$$

Kalles ofte Lagranges ligninger, men vanligst å bruke betegnelsen for konservativt system : $\vec{F}_i = -\nabla_i V$ Det gir:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

$V = V(q_i)$, ikke avh. av generaliserte hastigheter $\dot{q}_i$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}$$

Def. Lagrangefunksjonen $L = T - V$

$$\Rightarrow \underline{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \qquad \text{Lagranges ligninger}$$

Holonomt, konservativt system forutsatt.

Merk: L er ikke entydig; $L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{dF(q,t)}{dt}$
gir samme bevegelsesligninger som L

Kommentar:

Startet med ønske om å eliminere føringskreftene fra bev. lign. Har oppnådd dette. J tillegg har vi endt opp med <u>enklere</u> ligninger som kun involverer <u>skalare</u> funksjoner, T og V, i motsetning til utgangspunktet som involverte <u>vektorer</u>, $\vec{F}_i$ og $\vec{a}_i$

1-5: Generaliserte (hastighetsavhengige) potensialer

Lagranges ligninger på uforandret form dersom

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \quad , \quad L = T - U$$

Generalisert potensial : $U = U(q_j, \dot{q}_j)$

Viktig eksempel : Elektromagnetisk potensial

Maxwells ligninger (SI-enheter) :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Lorentzkraft : $\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow$ kan skrive $\vec{B}$ som "curl" til en vektor : $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Dermed : $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) = \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$

Kan da skrive : $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad ; \quad \phi$ = skalar funksjon

$\Rightarrow$ Lorentzkraften uttrykt ved ϕ og $\vec{A}$:

$$\vec{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times \nabla \times \vec{A}\right]$$

Passende sted å innføre Levi-Civita tensoren samt litt annen hensiktsmessig notasjon !

Levi-Civita tensoren ε_{ijk}

Antar kartesiske koordinater.

Summekonvensjon : $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \partial_i A_i = A_{i,i}$$

$$\nabla \phi = \vec{e}_i \partial_i \phi$$

>: skal summere over gjentatte indekser

<u>ε_{ijk}</u> : antisymmetrisk i alle indekser, skifter fortegn når to indekser bytter plass, er lik null når minst to indekser er like

$\varepsilon_{ijk} = +1$ når i, j, k syklisk $(\varepsilon_{123} = 1)$

$\varepsilon_{ijk} = -1$ —— " —— antisyklisk $(\varepsilon_{132} = -1)$

$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{C}$: $A_i = \varepsilon_{ijk} B_j C_k$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$: $B_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} A_{k,j}$

Har dessuten:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Eks:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B})_i (\vec{C} \times \vec{D})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \varepsilon_{ilm} C_l D_m =$$

$$= (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m$$

$$= (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Tilbake til det elektromagnetiske potensialet!

Vi hadde $\vec{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}\times\nabla\times\vec{A}\right]$

Ved å bruke $[\vec{v}\times(\nabla\times\vec{A})]_i = v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i$ har vi:

$$F_i = q\left\{-\partial_i\phi - \partial_t A_i + v_j\partial_i A_j - v_j \partial_j A_i\right\}$$

Bruker videre: $\quad v_j \partial_i A_j = \partial_i \vec{v}\cdot\vec{A}$

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + v_j \partial_j A_i$$

$$\Rightarrow F_i = q\left\{-\partial_i\phi + \partial_i \vec{v}\cdot\vec{A} - \frac{dA_i}{dt}\right\}$$

$$= q\left\{-\partial_i[\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}] - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i}(\vec{A}\cdot\vec{v})\right\}$$

$$= -\partial_i U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_i}$$

der $\quad U = q\phi - q\vec{A}\cdot\vec{v} \quad = U(\vec{r},\vec{v}) = U(x_i, v_i)$

[NB: $\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i}[\underbrace{q\phi}_{\Rightarrow 0} - q\vec{A}\cdot\vec{v}] = -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i} q\vec{A}\cdot\vec{v}$]

Har da Lagrangefunksjonen for ladet partikkel i e.m. felt:

$$L = T - U = T - q\phi + q\vec{A}\cdot\vec{v}$$

$$(T = \tfrac{1}{2}mv^2)$$

Friksjonskrefter

Lagranges lign. kan alltid skrives på formen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad \text{(holonomt system forutsatt)}$$

der L inneholder potensialet fra konservative krefter, mens Q_i er kreftene som <u>ikke</u> kan avledes fra et potensial.

Typisk eksempel: friksjonskrefter. Som regel er friksjonskraften F_f prop. med hastigheten v til en partikkel.

$$F_{fx} = -k_x v_x \quad , \quad \text{evt.} \quad F_{fx} = -\frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{1}{2}k_x v_x^2\right)$$

I 3 dimensjoner: $\vec{F}_f = -\nabla_v \mathcal{F}$

Rayleighs dissipasjonsfunksjon: $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_i \left(k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2\right)$

Arbeid utført av systemet mot friksjon:

$$dW_f = -\vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_f \cdot \vec{v}\, dt = \left(k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2\right) dt$$

$\Rightarrow 2\mathcal{F}$ er raten for energitap pga. friksjon

Generalisert friksjonskraft:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_{if} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_v \mathcal{F} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

Lagranges lign. blir nå: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_i} = 0$

Må altså kjenne to skalare funksjoner, L og $\mathcal{F}$, for at dette skal gi bevegelsesligningene.

1-6: Eksempler på bruk av Lagrangeformalismen

(1a) Én partikkel, kartesiske koordinater

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Bevegelseslign: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$

$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z,\quad Q_i = F_i$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z$$

⊃: vi er tilbake til Newtons 2. Lov!

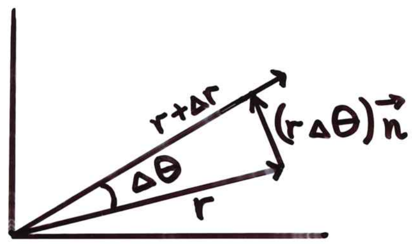
(1b) Én partikkel, plane polarkoordinater

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{q_i\} = \{r, \theta\}$$

Hastigheter:
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

Kan også sees av geometrien:



Radiell hastighet: $\frac{\Delta r}{\Delta t} \rightarrow \frac{dr}{dt} = \dot{r}$

Asimutal —"— : $\frac{r\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$

Generaliserte kraftkomponenter: $Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot \hat{r} = F_r$$

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r\vec{n} = r F_\theta$$

To gen. koord. $\Rightarrow$ To Lagranges ligninger

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{r} - m\underbrace{r\dot{\theta}^2}_{\text{sentripetalakselerasjon}} = F_r \qquad (q_1 = r)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

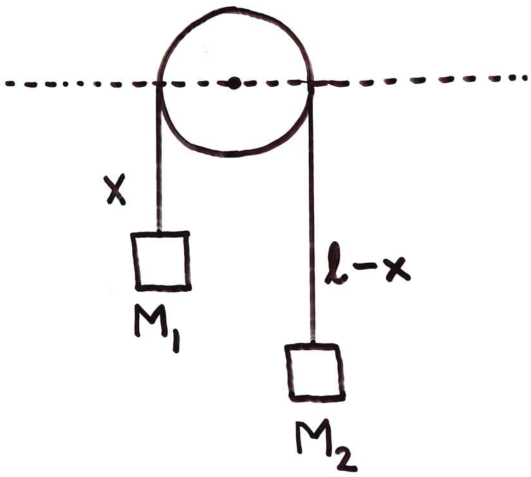
$$\Rightarrow \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = rF_\theta \qquad (q_2 = \theta)$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = rp_\theta = rmv_\theta = rmr\dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow N = rF_\theta$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta \quad \hat{=} \quad \frac{dL}{dt} = N$$

② Atwoods maskin



Bare én uavhengig koord: x

Potensiell energi: $V = -M_1 g x - M_2 g (l-x)$

Kinetisk —"— : $T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2$

$$L = T - V = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\dot{x}^2 + M_1 g x + M_2 g (l-x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (M_1 - M_2) g \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2)\dot{x}$$

$$\Rightarrow \quad (M_1 + M_2)\ddot{x} = (M_1 - M_2) g$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} g$$, som en vel kunne se direkte

Merk at føringskrefter, her strekket i snora, ikke forekommer i den Lagrangske formuleringen. Kan da heller ikke bestemme snorstrekket direkte ved bruk av Lagranges metode.