KAP. 2: VARIASJONSPRINSIPPER OG LAGRANGES LIGNINGER

2-1: Hamiltons prinsipp

Har utledet Lagranges lign. fra et "differensielt" prinsipp, ved å se på små virtuelle forskyvninger fra en gitt tilstand.

Kan også utlede Lagranges lign. fra et "integral"-prinsipp (evt. globalt prinsipp), ved å se på små variasjoner i hele bevegelsen mellom tider t_1 og t_2.

Presisering av utsagnet "systemets bevegelse mellom t_1 og t_2":

Konfigurasjonsrommet dannes av aksene til de n gen. koord. $q_1 \cdots q_n$ $(n = 3N - k)$. Posisjonen / Tilstanden til hele systemet er ved gitt tid t gitt ved ett punkt i konfig.rommet. "Systemets bevegelse" er beskrevet ved en kurve i konfig.rommet, der hvert punkt på kurven representerer hele systemets konfigurasjon ved et bestemt tidspunkt.

Hamiltons prinsipp: Systemet beveger seg fra t_1 til t_2 slik at

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt \qquad (= \text{virkning / virkningsintegral})$$

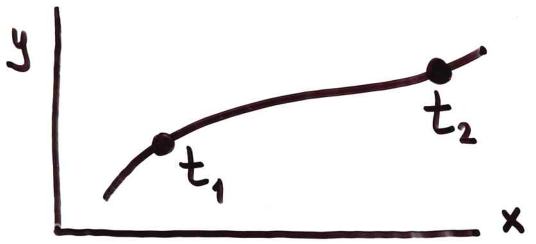
har et ekstremum (stasjonær verdi) for den virkelige veien.

$L = T - V = L(q, \dot{q}, t)$

Konservativt system hvis $V = V(q)$

Hamiltons prinsipp gjelder også mer generelt: $V \rightarrow U = U(q, \dot{q}, t)$

Slike systemer kalles monogeniske.



(x, y) fikserte ved t_1 og t_2

t er <u>parameter</u> for banen i konfig. rommet

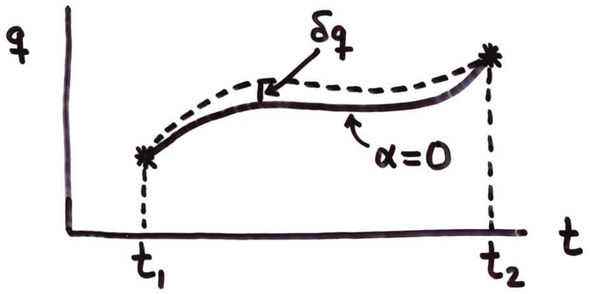
Hamiltons prinsipp kan uttrykkes slik:

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 \cdots q_n, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n, t)\, dt = 0$$

Vi skal se at Lagranges ligninger følger av Hamiltons prinsipp.

<u>2-3: Lagranges ligninger fra Hamiltons prinsipp</u>

Anta først én frihetsgrad, $q = q(t)$



De forskjellige kurvene parametriseres ved en parameter α, slik at $\alpha = 0$ tilsvarer ekstremum av I

$$\Rightarrow \quad q(t, \alpha) = q(t, 0) + \alpha\, \eta(t)$$

$\eta(t)$ vilkårlig, men slik at $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

Virkningen:

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L\left[q(t,\alpha), \dot{q}(t,\alpha), t \right] dt$$

Virtuelle variasjoner for <u>fast</u> t: $\delta q = \left(\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha$

$$\delta \dot{q} = \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha$$

Variasjon av I:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt$$

Kan bytte om på δ og d/dt i siste ledd:

$$\left.\begin{aligned} \delta \dot{q} &= \left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha}\right)_0 d\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha \partial t} d\alpha \\ \frac{d}{dt}\delta q &= \frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \alpha} d\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \delta \dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right] dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \, dt + \underbrace{\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \, dt$$

Skal ha $\delta I = 0$, og ettersom δq er vilkårlig, følger

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Generalisering til mange frihetsgrader, $i = 1 \cdots n$, gir

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \,, \quad i = 1, \cdots, n \qquad \text{Lagranges ligninger}$$

Krever uavh. gen. koord. q_i, altså holonome føringer.

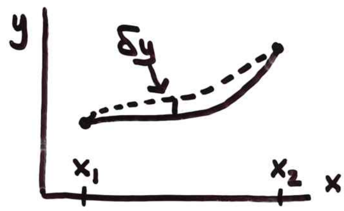
Gjelder for konservative systemer, $V = V(q_i)$, og for ikke-konservative systemer når $Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$, $L = T - U$.

2-2: Variasjonsregning

Anta kurve $y = y(x)$ mellom $y_1 = y(x_1)$ og $y_2 = y(x_2)$, og la $y' = \frac{dy}{dx}$. (Boka bruker $\dot{y}$; vi reserverer $\dot{y}$ for dy/dt)

Skal finne ekstremalverdi av integralet

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx$$



der $f(y, y', x)$ er en funksjon definert på kurven $y(x)$. Skal altså finne kurven $y(x)$ som gir $\delta I = 0$. Samme type regning som i kap. 2-3:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0$$

Som før kan vi bytte om δ og $\frac{d}{dx}$ i siste ledd: $\delta y' = \frac{d}{dx} \delta y$

$$\Rightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} \delta y \right] dx$$

(delvis integrasjon)

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y} \delta y\, dx + \underbrace{\left. \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right|_{x_1}^{x_2}}_{=0} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y\, dx$$

=0 (ingen variasjon av y i endepunktene)

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y\, dx = 0$$

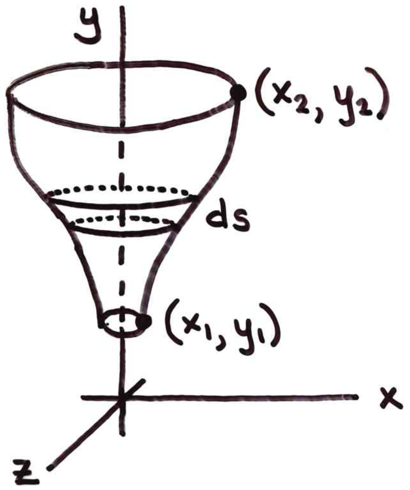
Siden δy er vilkårlig får vi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Eulers ligninger

(evt. Euler-Lagrange diff. lign.)

Eks: Minimum omdreiningsflate



Kurve mellom to fikserte punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) dreier om y-aksen. Skal finne den kurven $y(x)$ som gir minimum areal av omdreiningsflaten.

Areal av stripe ds : $2\pi x \, ds = 2\pi x \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$$= 2\pi x \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \sqrt{1+y'^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) \, dx \qquad \text{med} \quad f(y, y', x) = x\sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \, , \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \qquad \text{(Eulers ligning)}$$

Løsning:

$$\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = a = \text{konst.} \; ; \quad x^2 y'^2 = a^2(1 + y'^2) \; ;$$

$$y'^2(x^2 - a^2) = a^2 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\Rightarrow y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a \; \text{ar}\cosh \frac{x}{a} + b$$

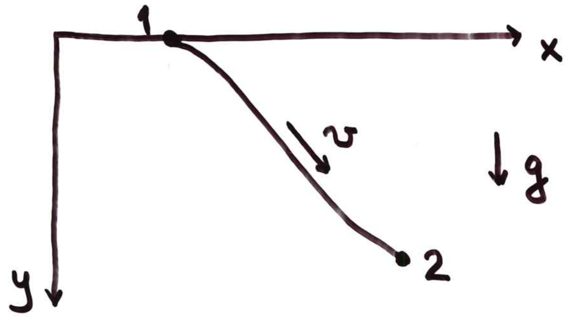
$$\left(x = a \cosh t \; \Rightarrow y = a \int \frac{\sinh t}{\sinh t} dt = at + b = a \, \text{arcosh} \frac{x}{a} + b \right)$$

Alternativt

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a}$$

Betingelsene $y(x_1) = y_1$ og $y(x_2) = y_2$ fastlegger int. konstantene a og b.

Eks: Brachistochroneproblemet



Finn den kurven mellom to punkter 1 og 2 som er slik at tilbakelagt tid for en partikkel blir minimal. (Anta null utgangshastighet.)

Altså: $t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}$ skal være et minimum.

Energibevarelse: $\frac{1}{2}mv^2 = mgy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

$$\Rightarrow t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_1^2 f(y,y',x)\,dx \quad \text{med } f(y,y',x) = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}} + \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} = 0$$

Ser på 2. ledd:

$$\frac{y''}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2}{2y^{3/2}\sqrt{1+y'^2}} - \frac{y'^2 y''}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}}$$

Ta med 1. ledd og sett $y^{-1/2}(1+y'^2)^{-1/2}$ utenfor:

$$\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\left\{\frac{1+y'^2}{2y} + y'' - \frac{y'^2}{2y} - \frac{y'^2 y''}{1+y'^2}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{y''(1+y'^2) - y'^2 y''}{1+y'^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{y''}{1+y'^2} = 0 \quad \Big| \cdot y'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{2y} + \frac{y'y''}{1+y'^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\ln y)' + \frac{1}{2}\left[\ln(1+y'^2)\right]' = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\ln\left[y(1+y'^2)\right]\right\}' = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left[y(1+y'^2)\right] = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow y(1+y'^2) = \text{konst.} \equiv 2k$$

Parameterframstilling:

$$x = k(\theta - \sin\theta) \qquad y = k(1-\cos\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k\sin\theta\, d\theta}{k(1-\cos\theta)\,d\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\Rightarrow 1+y'^2 = \frac{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{2}{1-\cos\theta}$$

$$\Rightarrow y(1+y'^2) = k(1-\cos\theta)\cdot\frac{2}{1-\cos\theta} = 2k$$

så vi ser at parameterframstillingen stemmer!

Hvis partikkelen begynner i origo med null utgangshastighet: