2-4: Hamiltons prinsipp for ikke-holonome systemer

Har til nå forutsatt holonome føringer: $f(\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N, t) = 0$

Kunne da, med j holonome føringer, innføre $n = 3N - j$ generaliserte koordinater q_k som alle er uavhengige. Hamiltons prinsipp,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 \cdots q_n, \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_n, t)\, dt = 0,$$

ledet fram til

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k = 0, \qquad (1)$$

som med uavhengige δq_k gav oss Lagranges ligninger:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

For ikke-holonome systemer er ikke alle δq_k uavhengige.

Her forutsetter vi at ikke-holonome føringer kan skrives:

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, dq_k + a_{lt}\, dt = 0 \qquad l = 1, 2, \cdots, m$$

Koeffisientene a_{lk} og a_{lt} kan generelt avhenge av q og t.

Kan nå ikke konstruere varierte baner med forskyvninger som oppfyller føringsbetingelsene $(*)$ (bevises ikke her!).

Kan derimot konstruere variert bane fra virkelig bane ved virtuelle forskyvninger δq_k, som da må oppfylle

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, \delta q_k = 0 \qquad \left[\text{Husk: } \delta t \text{ ikke involvert; virtuelle forskyvn. ved fast } t \right]$$

Bruker nå "Lagranges metode med ubestemte koeffisienter".
Har m lign. som hver ganges med en koeffisient λ_ℓ:

$$\lambda_\ell \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}\,\delta q_k = 0 \quad ; \quad \lambda_\ell = \lambda_\ell(q,t) \text{ generelt}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 dt \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_\ell\, a_{\ell k}\,\delta q_k = 0 \qquad (2)$$

Antar videre at Hamiltons prinsipp også gjelder for ikke-holonome systemer. Kan da kombinere (2) over med (1) s. 24:

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \sum_{\ell=1}^{m}\lambda_\ell a_{\ell k}\right)\delta q_k = 0$$

Her er ikke alle δq_k uavh. $\Rightarrow$ kan ikke sette $(\cdots) = 0$ for alle k.

$$\underbrace{1\quad 2\ \cdots\cdots\ n-m}_{\text{uavh.}}\quad \underbrace{n-m+1\ \cdots\cdots\ n}_{\text{ikke uavh., bundet av } \sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}\delta q_k = 0} \longrightarrow k$$

Men vi har λ_ℓ til vår disposisjon! Velger dem slik at

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \sum_{\ell=1}^{m}\lambda_\ell a_{\ell k} = 0 \quad ; \quad k = n-m+1, \cdots\cdots, n$$

Står da igjen med

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \sum_{\ell=1}^{m}\lambda_\ell a_{\ell k}\right)\delta q_k = 0$$

Her er alle δq_k uavh. $\Rightarrow$ kan sette $(\cdots) = 0$ for $k = 1, 2, \cdots, n-m$

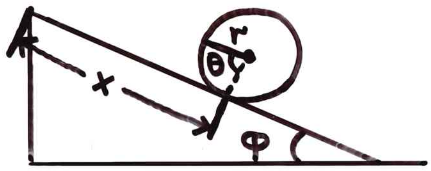
Dermed:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} + \sum_{\ell=1}^{m}\lambda_\ell\, a_{\ell k} = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

Har nå $n+m$ ukjente, $q_1 \cdots q_n$ og $\lambda_1 \cdots \lambda_m$. Har også $n+m$ lign., n Lagrangelign. og m føringsligninger ((*) s. 24):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{\ell k}\,\dot q_k + a_{\ell t} = 0 \quad ; \quad \ell = 1, 2, \cdots, m$$

Eks: Ring som ruller på et skråplan



To gen. koord: x, θ

En føringsbet: $r\,d\theta = dx$ (rullebet.)

Anta at ringen ligger i ro på toppen ved $x = 0$.

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = Mg\,(l - x) \sin\varphi \qquad (l = \text{planets lengde})$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 - Mg(l-x)\sin\varphi$$

Én føringsbet. $\Rightarrow$ én "føringsligning":

$$\sum_{k=1}^{2} a_k \dot{q}_k + a_t = a_x \dot{x} + a_\theta \dot{\theta} + a_t = 0$$

Sammenligning med $r\,d\theta = dx$, altså $\dot{x} - r\dot{\theta} = 0$ ①, gir

$$a_x = 1, \quad a_\theta = -r, \quad a_t = 0$$

Fra Lagranges lign., $\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \lambda a_k = 0$, får vi:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = Mg\sin\varphi, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x}, \quad \lambda a_x = \lambda \\ \Rightarrow Mg\sin\varphi - M\ddot{x} + \lambda = 0 \qquad ② \end{array}\right\} q_1 = x$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = Mr^2\ddot{\theta}, \quad \lambda a_\theta = -r\lambda \\ \Rightarrow -Mr\ddot{\theta} - \lambda = 0 \qquad ③ \end{array}\right\} q_2 = \theta$$

Har 3 ukjente, x, θ og λ, og 3 ligninger, ①, ② og ③.

Ta $\frac{d}{dt}$ på begge sider av $r\dot{\theta} = \dot{x}$ $\Rightarrow r\ddot{\theta} = \ddot{x}$, som innsatt i ③ gir $M\ddot{x} = -\lambda$, som innsatt i ② gir

$$\ddot{x} = \frac{1}{2} g \sin\varphi \quad , \quad \lambda = -\frac{1}{2} Mg \sin\varphi$$

og

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{r} = \frac{g}{2r} \sin\varphi$$

- Ved friksjonsløs glidning ned skråplanet er selvsagt akselerasjonen $\ddot{x}$ lik $g\sin\varphi$, så $\ddot{x}$ er altså halvparten så stor ved rulling som ved glidning. $(V \rightarrow T_{trans.} + T_{rot.})$

- Da $\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} g \sin\varphi$ fås

$$\int_0^{v_0} v\,dv = \frac{1}{2} g\sin\varphi \int_0^{l} dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} gl \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{gl\sin\varphi}$$ ved bunnen av planet

- Kan skrive $-\lambda = Mr\ddot{\theta}$, og vi innser at $-\lambda = \frac{1}{2}Mg\sin\varphi$ er føringskraften som gjør at ringen begynner å rotere

- Fortegnet på λ er her vilkårlig; i boka er valgt $a_\theta = r$ og $a_x = -1$, som gir $\lambda = \frac{1}{2}Mg\sin\varphi$. Men fysikken blir selvsagt den samme!

- Merk at vi her har brukt metoden på et eksempel med <u>holonome</u> føringer; kan være hensiktsmessig også da!

2-5: Fordeler med variasjonsprinsipp

- Prinsippet er mest nyttig når man kan finne en Lagrange-funksjon L uttrykt ved uavhengige koordinater, altså for holonome systemer

- Metoden involverer kun T og V, som er fysiske størrelser uavhengig av koordinatvalg. Hele formuleringen er dermed automatisk invariant mhp. valg av koordinater.

- Fra før hadde vi at L er ubestemt mhp. addisjon av dF/dt der $F = F(q,t)$. Med Hamiltons prinsipp som basis er dette innlysende:
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt}\, dt = \delta F(t_2) - \delta F(t_1) = 0$$
fordi det ikke er noen variasjon i endepunktene.

- Kan anvende metoden i mange grener av fysikken.
Eks:
$$L = \frac{1}{2}\sum_j L_j \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{\substack{jk \\ j\neq k}} M_{jk}\dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_j \frac{q_j^2}{2C_j} + \sum_j E_j(t)\, q_j$$
$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\sum_j R_j \dot{q}_j^2 \qquad \text{(dissipasjonsfunksjon)}$$
Lagranges ligninger blir:
$$L_j \ddot{q}_j + \sum_{k\neq j} M_{jk}\ddot{q}_k + R_j \dot{q}_j + q_j/C_j = E_j(t)$$
Kan beskrive: 1) system av elektriske kretser koblet via gjensidige induktanser M_{jk} ($q \mathrel{\hat{=}}$ elektrisk ladning).

2) system av masser og fjærer som beveger seg i viskøst medium ($q \mathrel{\hat{=}}$ posisjoner).

2-6: Bevarelsessetninger og symmetriegenskaper

Med n frihetsgrader vil bevegelseslign. være n diff.lign. som er av 2.orden i tida. Løsning innebærer 2 integrasjoner pr. lign.

$\Rightarrow$ ialt 2n integrasjonskonst. som kan bestemmes fra initial-betingelsene, dvs, startverdier for $q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n$

Ofte ikke interessert i fullstendig løsning $q_j(t)$, $j = 1 \dots n$. Viktigere å kunne beskrive systemets bevegelse generelt (bevegelsens "natur") i form av bevaringslover og symmetri-egenskaper.

Anta system av punktmasser i potensial V som kun er avhengig av posisjonene.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum \tfrac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = m_i \dot{x}_i = p_{ix}$$

Med generaliserte koord. q_i definerer vi den generaliserte, evt. kanoniske, evt. konjugerte impulsen som

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

Hvis potensialet er hastighetsavhengig, vil kanonisk impuls være forskjellig fra mekanisk impuls.

Eks: Partikler i elektromagnetisk felt

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \sum_i q_i \phi(\vec{r}_i) + \sum_i q_i \vec{A}(\vec{r}_i) \cdot \dot{\vec{r}}_i$$ (se s.12)

$$\Rightarrow p_{ix} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i + q_i A_x \neq m_i \dot{x}_i$$

Har en <u>syklisk</u> ("ignorerbar") koordinat q_i dersom L ikke inneholder q_i. Dermed er $\partial L/\partial q_i = 0$, og Lagranges lign. blir

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i = 0$$

Altså: $\quad p_i = \text{konstant}$ når q_i er syklisk

⟹: Kanonisk impuls tilhørende syklisk koordinat er bevart

Eks: E.m. felt med Φ og $\vec{A}$ uavhengig av x.

Da er L også uavh. av x $\Rightarrow$ x er syklisk koordinat

$$\Rightarrow p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x = \text{konst.}$$

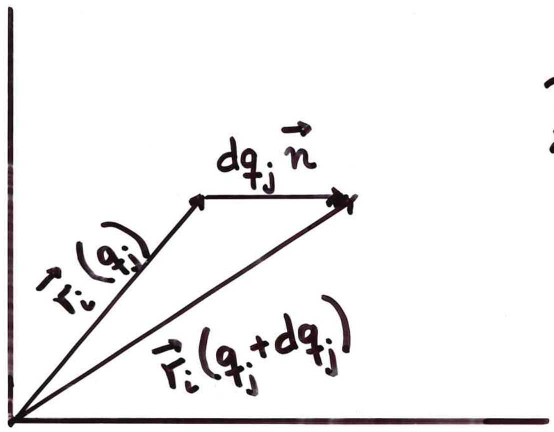
mens mekanisk impuls $m\dot{x}$ ikke er bevart.

—— • ——

Skal nå se nærmere på bevaringslover i forb. med translasjon og rotasjon, samt bevaring av energi.

<u>Translasjon</u>

Ser på en gen. koord. q_j som er slik at dq_j betyr translasjon av hele systemet i en retning $\vec{n}$



$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \lim_{dq_j \to 0} \frac{\vec{r}_i(q_j+dq_j) - \vec{r}_i(q_j)}{dq_j}$$

$$= \frac{dq_j\,\vec{n}}{dq_j} = \vec{n} \qquad (\text{for alle } i)$$

Anta konservativt system, $V = V(q)$.

Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$ (gjelder generelt for holonomt system; se s.9)

Hastigheter, og dermed T, upåvirket av å flytte origo $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$

$$\Rightarrow \quad \dot{p}_j = Q_j \overset{(s.8)}{=} \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{n} = \vec{n}\cdot\vec{F},$$

m.a.o: Q_j = komponenten av total kraft $\vec{F}$ langs $\vec{n}$

Da $T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}$ fås $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$

Fra s.8: $\partial\dot{\vec{r}}_i/\partial\dot{q}_j = \partial\vec{r}_i/\partial q_j$

$$\Rightarrow p_j = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{n} = \vec{n}\cdot\vec{P},$$

m.a.o: p_j er komponenten av total lineær impuls $\vec{P}$ langs $\vec{n}$

Altså: $\dot{p}_j = Q_j$ er bevegelseslign. for total lineær impuls

Hvis nå q_j er syklisk, vil $\frac{\partial L}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j = 0$ $\quad$ >: $\dot{p}_j = 0$

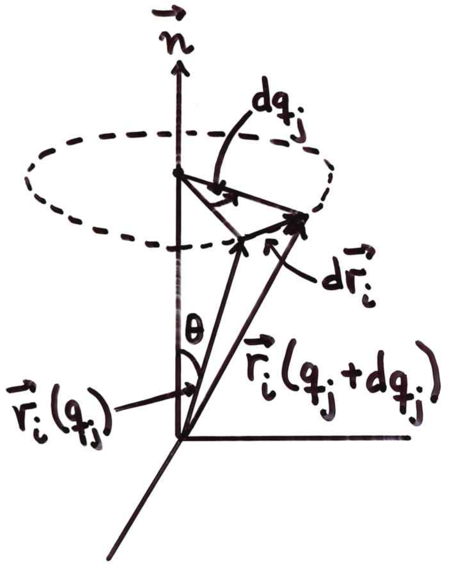
Dvs: Bevaringslov for lineær impuls, som funnet før.

Rotasjon

Ser på en gen. koord. q_j som er slik at dq_j betyr rotasjon av hele systemet omkring en akse $\vec{n}$

Med samme argumenter som over får vi igjen

$$\dot{p}_j = Q_j \qquad \text{med} \quad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$



$$|d\vec{r}_i| = r_i \sin\theta \, dq_j$$

$$\text{ɔ:} \quad \left|\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right| = r_i \sin\theta$$

med retning $\perp$ $\vec{r}_i$ og $\vec{n}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{n} \times \vec{r}_i$$

Vi får:

$$\underline{Q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \vec{F}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \sum_i \vec{n} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$= \sum_i \vec{n} \cdot \vec{N}_i = \underline{\vec{n} \cdot \vec{N}}$$

$$\underline{p_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{n} \times \vec{r}_i) = \sum_i \vec{n} \cdot (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$= \vec{n} \cdot \sum_i \vec{L}_i = \underline{\vec{n} \cdot \vec{L}}$$

Altså:

Q_j er komponenten av dreiemomentet $\vec{N}$ langs $\vec{n}$

p_j er komponenten av dreieimpulsen $\vec{L}$ langs $\vec{n}$

Hvis q_j er syklisk er $\partial L/\partial q_j = -\partial V/\partial q_j = Q_j = \vec{n} \cdot \vec{N} = 0$, og $p_j = \vec{n} \cdot \vec{L}$ er bevart.

Generelt:

<u>Hvis systemet er invariant overfor</u> translasjon, er $\vec{P}$ konstant.

__________ " __________ rotasjon, er $\vec{L}$ konstant omkring rotasjonsaksen.

(Kulesymmetrisk system $\Rightarrow \vec{L}$ = konst.)

Bevarelse av energi:

Anta at vi har $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ og $V = V(q_i)$. Ser på $\frac{dL}{dt}$:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) + \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

Energifunksjonen: $H(q, \dot{q}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L$

$$\Rightarrow \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Anta $L = L(q_i, \dot{q}_i)$, dvs $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Dermed: $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$

For homogen funksjon av n'te grad gjelder Eulers teorem:

$$\sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = nf$$

T er homogen av 2. grad: $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i m_i \dot{q}_i = 2T$

(Da syst. er konservativt, er $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$)

$\Rightarrow H = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V =$ total energi

Altså: hvis $\partial L/\partial t = 0$ er den totale energien bevart

KAP. 8: HAMILTONS LIGNINGER

- Lagranges ligninger er ekvivalente med Hamiltons ligninger; derfor ingen ny fysikk involvert – kun en ny metode
- Hamiltons metoder ikke bedre enn Lagrangeformalismen med tanke på direkte løsning av mekanikkproblemer
- Hamiltons prosedyre mer velegnet på andre områder av fysikken, f.eks. innen kvantemekanikk og stat. mek.
- Antar nå holonome systemer og monogeniske krefter, dvs $V = V(q)$, evt. $U = U(q, \dot{q})$ slik at $Q_i = -\partial U/\partial q_i + \frac{d}{dt} \partial U/\partial \dot{q}_i$ (jfr. e.m. felt)

8-1: Legendretransformasjoner og Hamiltons bev. lign.

Lagrangeformuleringen:

Med n frihetsgrader: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

Har n 2. ordens diff. ligninger; fullstendig løsning krever $2n$ initialbet., f.eks. verdier for $q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ ved en tid t_1, evt. verdier for $q_1, \dots, q_n$ ved to tider t_1 og t_2.
Systemets tilstand spesifiseres ved et punkt i det n-dimensjonale konfigurasjonsrommet med akser q_i.

Hamiltonformuleringen:

Ligninger av 1. orden. Fremdeles 2n initialbetingelser
$\Rightarrow$ må ha 2n 1.ordens ligninger og 2n uavhengige variable

Systemets tilstand spesifiseres ved et punkt i det 2n-dimensjonale faserommet med akser q_i og p_i, der

$$p_i = \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Størrelsene q, p kalles kanoniske variable.

Matematisk innebærer overgangen fra Lagrange- til Hamiltonformulering at vi endrer variable i våre funksjoner, fra $(q, \dot{q}, t)$ til (q, p, t), med $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$.

Til dette trenger vi Legendretransformasjonen!

Generelt om Legendretransf.:

Anta at vi har en funksjon $f(x,y)$ slik at

$$df = u\,dx + v\,dy \;; \quad u = \partial f/\partial x, \quad v = \partial f/\partial y$$

Ønsker å forandre basis fra (x,y) til (u,y) slik at differensialer uttrykkes ved du og dy. Definer

$$g = f - ux$$

$$\Rightarrow \quad dg = df - u\,dx - x\,du = u\,dx + v\,dy - u\,dx - x\,du$$

$$= v\,dy - x\,du \quad ; \text{ på ønsket form!}$$

x og v er nå funksjoner av u og y:

$$x = -\partial g/\partial u \quad , \quad v = \partial g/\partial y$$

Legendretransf. brukes mye i termodynamikken.

Eks: Entalpien H er funksjon av entropien S og trykket p: [i boka brukes X istedetfor H]

$$\frac{\partial H}{\partial S} = T \, , \quad \frac{\partial H}{\partial p} = V$$

$$\Rightarrow dH = T\,dS + V\,dp$$

$H = H(S,p)$ nyttig for isentropiske og isobariske prosesser. Dersom en ønsker å beskrive isotermiske og isobariske prosesser, trenger en heller en funksjon av T og p.

Legendretransf.: $G = H - TS$

$$\Rightarrow dG = dH - T\,dS - S\,dT$$
$$= T\,dS + V\,dp - T\,dS - S\,dT$$
$$= V\,dp - S\,dT$$

$$ⅽ: \quad \frac{\partial G}{\partial p} = V \, , \quad -\frac{\partial G}{\partial T} = S$$

G er Gibbs fri energi

—— • ——

"Naturlig" Legendretransformasjon for endring av variable fra $(q, \dot{q}, t)$ til (q, p, t):

$$H = p\dot{q} - L$$

Hamiltonfunksjonen: $H = H(q,p,t) = p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t)$

Differensierer (med summekonvensjon: summér over gjentatte indekser):
$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Fra definisjonen ~~øverst~~ får vi:
$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Ettersom $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, forsvinner de to leddene med $d\dot{q}_i$. Videre har vi fra Lagranges lign. at
$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$$

Dermed:
$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

og vi kan skrive ned <u>Hamiltons kanoniske ligninger</u>:
$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad -\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \text{(2n 1.ordens ligninger)}$$

I tillegg har vi
$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

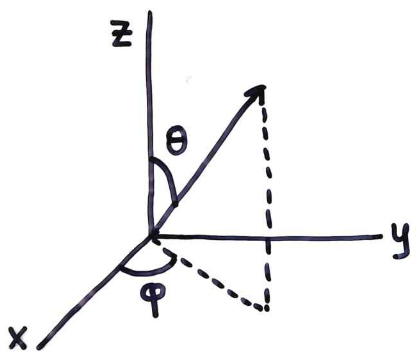
Vanlig prosedyre i Hamiltonformalismen:

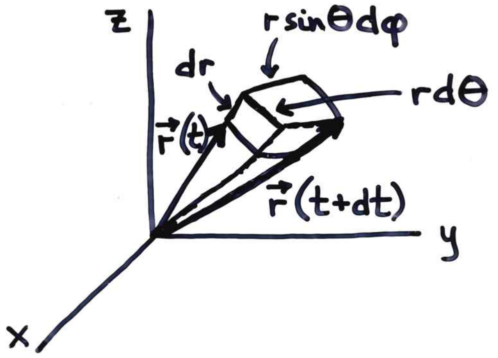
1. Konstruer $L = L(q,\dot{q},t)$
2. Definer kanoniske impulser $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$
3. Konstruer $H = p_i\dot{q}_i - L$; her er H funksjon av $q, \dot{q}, p$ og t
4. Benytt $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ til å finne $\dot{q}_i$ som funksjon av (q,p,t)
5. Eliminer deretter $\dot{q}_i$ fra H slik at $H = H(q,p,t)$

Deretter kan H benyttes til å løse de kanoniske bevegelseslign.

Eks 1: Partikkel i sentralt kraftfelt

Bruker kulekoordinater; $q_i = (r, \theta, \varphi)$. $\quad V = V(r)$





$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right), \quad L = T - V$$

Bruker $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ til å eliminere $\dot{q}_i$ fra H:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow H = p_i \dot{q}_i - T + V$$

$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + V(r)$$

$$= T + V$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{p_r^2}{m^2} + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4 \sin^4\theta} + \frac{1}{2} m r^2 \frac{p_\theta^2}{m^2 r^4} + V(r)$$

$$= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta} \right) + V(r)$$

$$= H(q, p)$$

Altså: Har vist at H = total energi $T + V$, og vi har greid å uttrykke H som funksjon av de kanoniske variable $(q, p) = (r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$.

Eks 2: Partikkel i elektromagnetisk felt.

Ikke konservativt system; $L = T - U$, hvor $U = q\phi - q\vec{A}\cdot\vec{v}$

Potensialene ϕ og $\vec{A}$ avhenger av $\vec{r}$ og t.

Husker fra tidligere at $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ er oppfylt med denne U.

$$L = T - U = \tfrac{1}{2}mv^2 - q\phi + q\vec{A}\cdot\vec{v} = L(x_i, \dot{x}_i, t)$$

Anta kartesiske koordinater (samt summekonvensjon!):

$$L = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + qA_i\dot{x}_i - q\phi$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i$$

$$\Rightarrow H = p_i\dot{x}_i - L = (m\dot{x}_i + qA_i)\dot{x}_i - \tfrac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i - qA_i\dot{x}_i + q\phi$$

$$= \tfrac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i + q\phi$$

$$= \text{mekanisk energi} + \text{potensiell energi}$$

Uttrykker $\dot{x}_i$ ved p_i : $\dot{x}_i = \frac{1}{m}(p_i - qA_i)$

$$\Rightarrow H(x_i, p_i, t) = \frac{1}{2m}(p_i - qA_i)(p_i - qA_i) + q\phi$$

$$= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$$

der avhengigheten av x_i og t ligger i $\vec{A}$ og ϕ.

Hvis nå $(\vec{A}, \phi)$ er uavhengige av t, blir $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, og dermed

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$