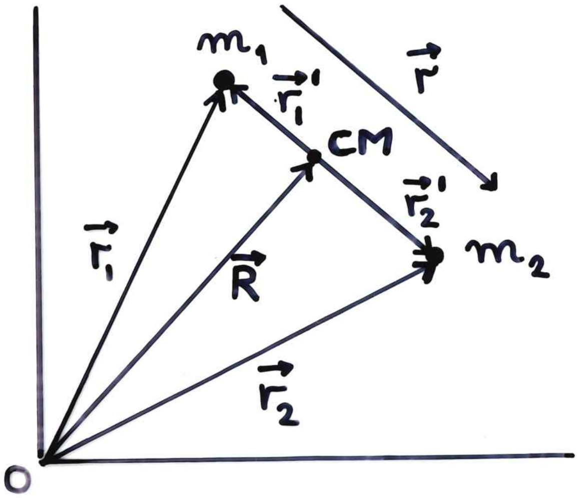
KAP. 3: TOLEGEMEPROBLEMET ; SENTRALE KREFTER

3-1: Reduksjon til et ekvivalent ettlegemeproblem



To legemer $\Rightarrow$ 6 frihetsgrader

$\Rightarrow$ 6 uavh. generaliserte koord.

Velger $\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ og

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Anta konservativt system og sentrale krefter

$$\Rightarrow \quad V = V(r) \;, \qquad r = |\vec{r}|$$

Lagrangefunksjonen:

$$L = T(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) - V(r)$$

Kinetisk energi: (se s. 5)

$$T = \tfrac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_1{}')^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_2{}')^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \tfrac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1{}'^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2{}'^2 + \dot{\vec{R}}\cdot\underbrace{\frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1{}' + m_2\vec{r}_2{}')}_{=0}$$

$$= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2 + T'$$

$$T' = \tfrac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}m_1m_2\dot{\vec{r}}^2\,\frac{(m_2+m_1)}{(m_1+m_2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\,\dot{\vec{r}}^2$$

Innfører <u>redusert masse</u> : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$

Dessuten : $M = m_1 + m_2$

Dermed : $T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + T' = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = L(r, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}})$$

Ser at $\vec{R}$ er syklisk koordinat (dvs: L uavh. av $\vec{R}$)

$\Rightarrow \dot{\vec{R}}$ er konstant (egentlig: $p_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = M\dot{R} = \text{konst.}$)

Kan rett og slett droppe leddet $\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$, og vi har redusert tolegemeproblemet til et ekvivalent ettlegemeproblem:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(r)$$

<u>3-2: Bevegelsesligningene</u>

Vi kan altså betrakte en masse m i et sentralt kraftfelt. Da systemet er rotasjonssymmetrisk, må total dreieimpuls være bevart:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{konstant} \quad \text{(både i størrelse og retning)}$$

Kan bare være oppfylt dersom $\vec{r}$ hele tiden ligger i et plan $\perp$ $\vec{L}$. (Sentralbevegelse altså alltid i et plan.)

Virker nå rimelig å velge polarkoordinater slik at polaraksen er parallell med $\vec{L}$

$\Rightarrow \varphi = \pi/2 = \text{konst.}$

$\Rightarrow$ står igjen med plane polarkoordinater (r, θ)

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \qquad \text{[Eks. 1b, s.14]}$$

$$= L(r, \dot{r}, \dot{\theta})$$

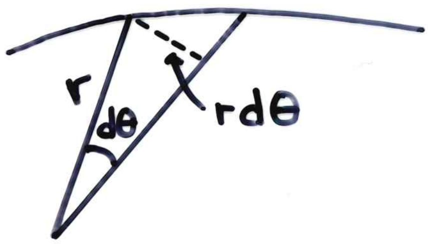
$\therefore$ θ er syklisk koordinat $\therefore$ $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ er bevart.

Den ene bevegelseslign. blir altså:

$$\dot{p}_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

$$mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{dreieimpulsens størrelse}$$

Vi kan nå umiddelbart bevise Keplers 2. lov, som sier at radien sveiper over like store arealer i løpet av like store tidsrom.



$$dA = \tfrac{1}{2} r \cdot r d\theta$$

$$\Rightarrow \dot{A} = \tfrac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2m} p_\theta = \text{konst.}$$

Formulert for planetbevegelse, $V \sim 1/r$, men gyldig for vilkårlig sentralbevegelse.

Beveg. lign. nr. to er Lagranges lign. for koordinaten r:

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(m\dot{r})}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}} \underbrace{- mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r}}_{-\frac{\partial L}{\partial r}} = 0$$

Kraft i $\vec{r}$-retning: $f(r) \equiv -\frac{\partial V}{\partial r}$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r)$$

Eliminerer $\dot{\theta}$ via $mr^2\dot{\theta} = \ell$ >: $\dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$ (1)

$$\Rightarrow \quad m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{mr^3} = f(r)$$; 2.ordens diff.lign. bare for r

Med konservativt system har vi, i tillegg til ℓ, at total energi E er en bevegelseskonstant:

$$E = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) \qquad (2)$$

[Kan finnes ved direkte integrasjon av bevegelseslign.; se Goldstein s.74]

Vi har to variable, r og θ, og i utgangspunktet to 2.ordens diff.lign. ⇒ må foreta 4 integrasjoner for å finne $r(t)$ og $\theta(t)$. Har allerede gjort 2 integrasjoner, der int.konst. ble fastlagt ved hjelp av ℓ og E. Det gjenstår å utføre 2 integrasjoner for å løse de to 1.ordens ligningene. La oss starte med (2), omskrevet v.hj.a. (1):

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V = E$$

$$\Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \ell^2/2mr^2\right)}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \ell^2/2mr^2\right)}}$$

La $r(t=0) = r_0$ = minimum radius. Dermed er $dr > 0$ når $dt > 0$, og valget av $+\sqrt{\cdots}$ for dr/dt er OK. Løsningen blir:

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V - \ell^2/2mr^2\right)}} = t(r; E, \ell, r_0)$$

som kan inverteres, slik at vi finner $r(t)$.

Med kjent $r(t)$ finner vi $\theta(t)$ av $mr^2\dot{\theta} = \ell$:

$$d\theta = \frac{\ell\, dt}{mr^2} \quad ; \quad \theta(t) = \ell \int_0^t \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0 \quad ; \quad \theta_0 = \theta(t=0)$$

Altså 4 integrasjonskonstanter : E, ℓ, r_0, θ_0

I klassisk mekanikk kunne vi alternativt ha valgt f.eks. $r_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\theta}_0$ for å bestemme integrasjonskonstantene.

Men i f.eks. kvantemekanikk er initialverdier av r og θ, evt. $\dot{r}$ og $\dot{\theta}$, "uten mening" (i hvert fall alle fire samtidig; jfr. Heisenbergs uskarphetsrelasjoner!), mens E og ℓ fremdeles har god mening. Derfor fornuftig å velge E og ℓ hvis man ønsker å diskutere overgangen mellom klassisk mek. og kvantemek.

3-3: Ekvivalent endimensjonalt problem

Som regel ikke mulig å løse integralene for t og θ analytisk. Men innsikt kan oppnås uten fullstendig løsning, ved å benytte en endimensjonal analogi:

Vi hadde følgende bevegelsesligninger:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r) \quad \left(= -\frac{\partial V}{\partial r}\right) \quad ; \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{mr^2}$$

Innsatt for $\dot{\theta}$ får vi : $m\ddot{r} = f'(r) = f(r) + \ell^2/mr^3$

ɔ: Newtons 2. lov for et endim. problem der en masse m påvirkes av en kraft $f' = f + \ell^2/mr^3$

Tilleggsleddet er: $\frac{\ell^2}{mr^3} = \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{mr^3} = mr\dot{\theta}^2 = mv_\theta^2/r$

$\therefore$ sentrifugalkraften

Alternativt kan vi betrakte energien:

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + V(r) \qquad (\dot{\theta} = \ell/mr^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

$\therefore$ som et endim. problem med potensiell energi

$$V'(r) = V(r) + \ell^2/2mr^2$$

Kraft avledet av V': $f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f + \ell^2/mr^3$,

som stemmer med f' fra forrige side.

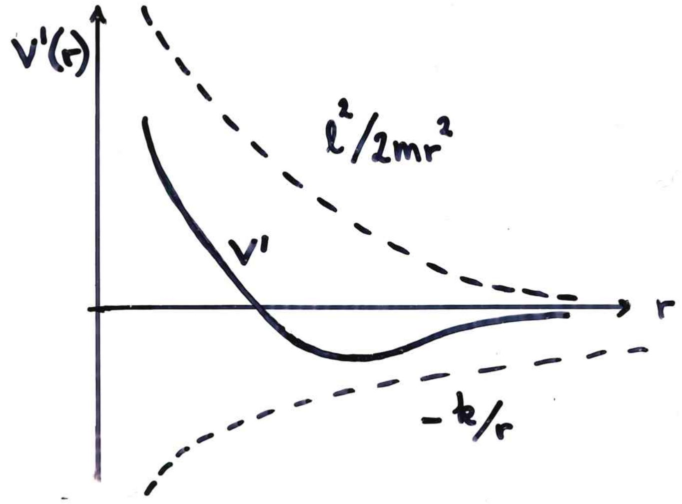
Eks: Attraktiv $\frac{1}{r^2}$ - kraft

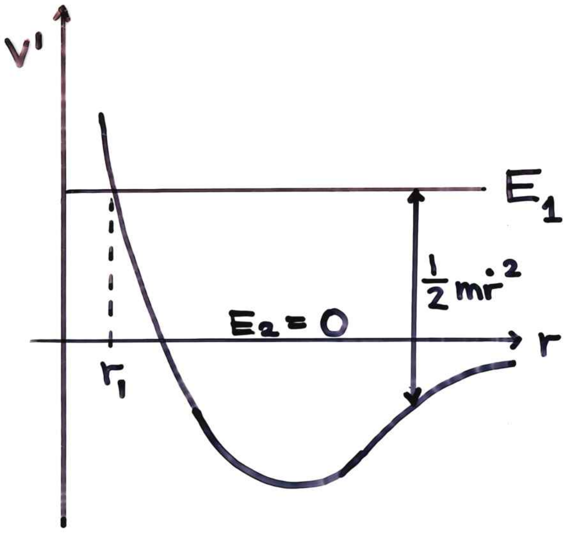
$$f(r) = -k/r^2 \quad \therefore \quad V(r) = -k/r$$

$$\Rightarrow V'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$ sentrifugalbarrieren

$$E = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + V'(r) \geq V'(r)$$

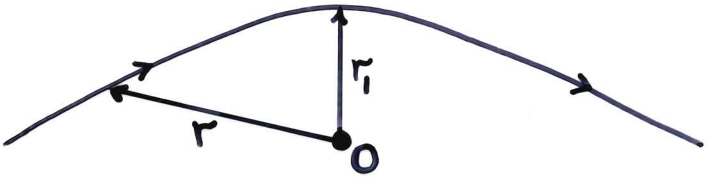
La oss plotte $V'(r)$; $\lim_{r\to 0} V'(r) = +\infty$, $\lim_{r\to\infty} V'(r) = -0$





Hvis total energi er $E_1 > 0$:
Partikkelen kan ikke komme nærmere enn r_1 (da $E \geq V'$).
Ingen øvre grense for r $\Rightarrow$ bevegelsen er <u>ikke bundet</u>.
Vendepunkt ved $r = r_1$.

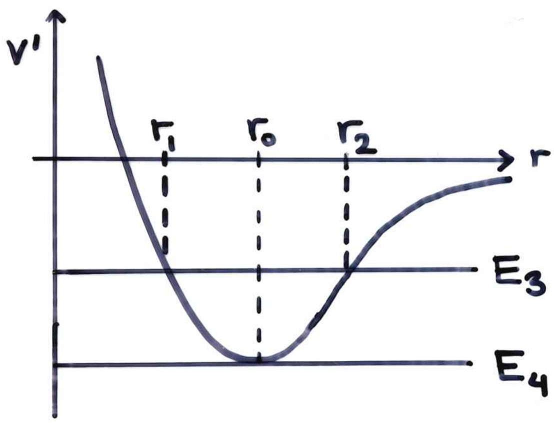
Skisse av partikkelbanen:



(Hyperbel)

Når $E = E_2 = 0$ får vi kvalitativt samme type bevegelse.
(Parabel)

Hva med energier $E < 0$?

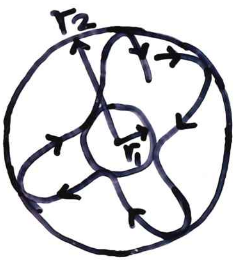


Bevegelsen er nå <u>bundet</u>:

$r_1 \leq r \leq r_2$

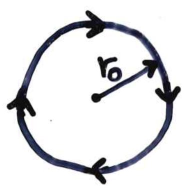
To vendepunkter, r_1 og r_2

$E = E_3$:



(ikke nødv. vis lukket bane)

$E = E_4$:



$r_1 = r_2 = r_0$

$\dot{r} = 0 \Rightarrow$ sirkel

Min. punkt for V'

$\Rightarrow f' = -\partial V'/\partial r = 0$

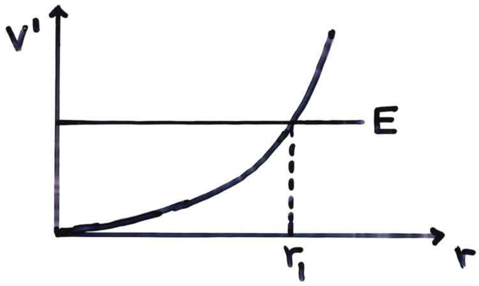
$\Rightarrow f = -mr\dot{\theta}^2$

Dvs: ytre kraft f balanserer akkurat sentripetalkraften

Eks: Harmonisk oscillator

$$f(r) = -kr \;, \qquad V(r) = \tfrac{1}{2} k r^2$$

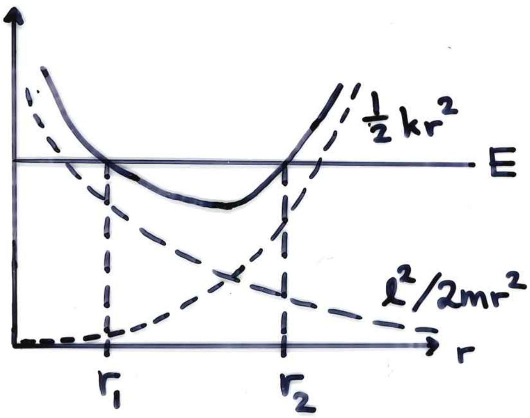
$l = 0$: Ingen dreieimpuls, $\vec{r} \parallel \vec{v}$, bevegelse langs rett linje



$V' = V$

Bundet, harmonisk bevegelse; $r \leq r_1$

$l \neq 0$:



$$V' = \tfrac{1}{2} k r^2 + \frac{l^2}{2mr^2}$$

Bundet bevegelse, $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\vec{f} = -k\vec{r} \;\Rightarrow\; f_x = -kx \;, \quad f_y = -ky$$

>: to harmoniske oscillatorer som danner en vinkel på $90°$ med hverandre ; samme frekvens

$\Rightarrow$ elliptisk bane

Eksempler: Sfærisk pendel.
Lissajoufigurer på oscilloskopet.

3-4: Virialteoremet

Generelt teorem, gyldig for mange ulike fysiske systemer. Av <u>statistisk</u> natur: Har å gjøre med tidsmiddelet av ulike størrelser.

Anta system med massepunkter i posisjoner $\vec{r}_i$, påvirket av krefter $\vec{F}_i$ (inkl. evt. føringskrefter).

Bevegelsesligningene (Newtons 2. lov): $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$

Danner $G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i + \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i$$

1. ledd: $\sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_i \dot{\vec{r}}_i \cdot m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i v_i^2 = 2T$

2. ledd: $\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$

Dermed:

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

Midler denne ligningen over et tidsintervall τ:

$$\overline{\frac{dG}{dt}} \equiv \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dG}{dt}\, dt = 2\overline{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$$

$$\Rightarrow 2\overline{T} + \overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} = \frac{1}{\tau}\left[G(\tau) - G(0)\right]$$

For periodisk bevegelse med τ = perioden: H.S. $= 0$

For ikke-periodisk bevegelse med endelige $\vec{r}_i$ og $\vec{p}_i$ så G er begrenset:

$$\lim_{\tau \to \infty} \text{H.S.} = 0$$

I begge tilfeller får vi:

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i} \qquad \underline{\text{Virialteoremet}}$$

Eks.1: Ideell gass

Volum V, N atomer

Ekvipartisjonsprinsippet $\Rightarrow \overline{T} = \frac{3}{2}NkT$

$\vec{F}_i$ er veggkraften: $d\vec{F}_i = -p\vec{n}\,dA$ (p = trykket)

(ideell gass $\Rightarrow$ interatomære krefter kan neglisjeres)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{\sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{r}_i} = -\frac{1}{2}p\int \vec{n}\cdot\vec{r}\,dA = -\frac{1}{2}p\int \underbrace{\nabla\cdot\vec{r}}_{3}\,dV = -\frac{3}{2}pV$$

$$\Rightarrow \quad pV = NkT \qquad \text{Boyles lov}$$

Eks.2: $\vec{F}_i = -\nabla_i V$

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\sum_i \nabla_i V\cdot\vec{r}_i}$$

Anta én partikkel i sentralfelt: $\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial V}{\partial r}r}$

Anta videre $V = a r^{n+1}$ (dvs $f \sim r^n$). Da blir

$$\frac{\partial V}{\partial r}r = (n+1)V$$

$$\Rightarrow \overline{T} = \frac{n+1}{2}\overline{V}$$

Hvis $n=-2$ (Keplerform; se neste kap.):

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V}$$

Hvis $n=1$: $V = ar^2$; $\overline{T} = \overline{V}$ (Harmonisk oscillator)

3-7: Keplerproblemet

La oss gå tilbake til kap. 3-2, med sentrale krefter på formen $f(r) = -k/r^2$, dvs. potensial $V(r) = -k/r$.

Ønsker å bestemme en partikkels bane i dette potensialet, dvs. sammenhengen mellom r og θ.

Vi hadde $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \ell^2/2mr^2)}$, (fremdeles generell $V(r)$)
som kan skrives på formen

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \ell^2/2mr^2)}}$$

Innfører $d\theta$ ved å bruke $\dot{\theta} = \ell/mr^2$ >: $\ell\, dt = mr^2\, d\theta$

$$\Rightarrow \quad d\theta = \frac{\ell\, dr}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \ell^2/2mr^2)}}$$

Løsning:

$$\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2mV}{\ell^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0$$

Nå spesifiserer vi potensialet, $V = -k/r$, og substituerer $u = 1/r$ $\left(\Rightarrow du = -dr/r^2\right)$:

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2mku}{\ell^2} - u^2}}$$

Konstanten θ_0 er bestemt av initialbetingelsene. La oss sette $\theta_0 = 0$, som tilsvarer at polarvinkelen θ regnes i forhold til <u>perihel</u>, dvs det punktet hvor partikkelen er nærmest sentrum.

Integralet i uttrykket for θ er et standard integral med analytisk Løsning:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos\left[-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right]$$

der $q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Sammenligning med forrige side tilsier at vi må velge

$$\alpha = \frac{2mE}{\ell^2}, \quad \beta = \frac{2mk}{\ell^2}, \quad \gamma = -1, \quad q = \left(\frac{2mk}{\ell^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\beta + 2\gamma u}{\sqrt{q}} = -\frac{1 + \frac{2\gamma u}{\beta}}{\sqrt{1 - 4\alpha\gamma/\beta^2}} = \frac{\frac{\ell^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}}$$

$$\Rightarrow \theta = -\arccos \frac{\frac{\ell^2}{mkr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}}$$

Innfører <u>eksentrisitet</u>: $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}}$

Dessuten "banens parameter": $p = \ell^2/mk$

Dermed: $\theta = -\arccos \frac{1}{\varepsilon}\left(p/r - 1\right)$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\varepsilon}\left(p/r - 1\right) \qquad [\cos(x) = \cos(-x)]$$

$$\Rightarrow p/r = 1 + \varepsilon\cos\theta$$

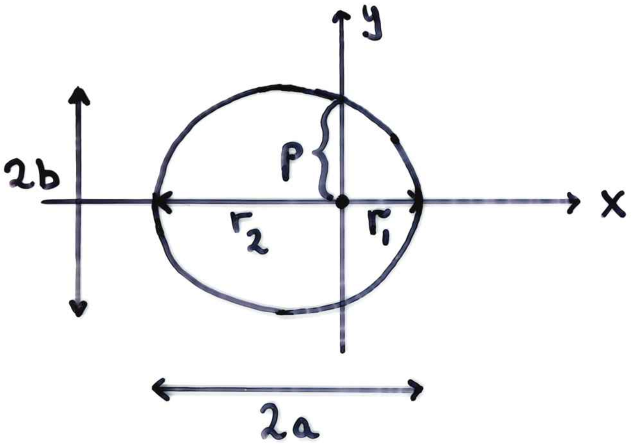
$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta}$$

Dette er et kjeglesnitt med brennpunkt i origo.
Vi ser at $\theta = 0$ tilsvarer $r = r_{min} = p/(1+\varepsilon)$; perihel.

Vi kan nå klassifisere ulike typer baner:

$\varepsilon > 1$: hyperbel $(E > 0)$
$\varepsilon = 1$: parabel $(E = 0)$
$\varepsilon < 1$: ellipse $(E < 0)$
$\varepsilon = 0$: sirkel $(E = -mk^2/2\ell^2)$

La oss se litt nærmere på <u>ellipsen</u>.



Store halvakse: a
Lille —"—: b

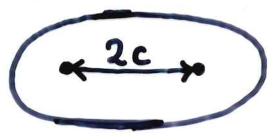
Bundet bevegelse: $r_1 \leq r \leq r_2$

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \underline{a} = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\ell^2/mk}{1-(1+2E\ell^2/mk^2)} = -\frac{k}{2E} = \underline{\underline{\frac{k}{2|E|}}} \qquad (E<0)$$

Hvis $2c$ er avstanden mellom brennpunktene, gjelder

$$\varepsilon = c/a$$



Videre har vi for en ellipse at $a^2 = b^2 + c^2$.

Dermed: $$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2\varepsilon^2 = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}(1-\varepsilon^2) = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \underline{b} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\ell^2/mk}{\sqrt{-2E\ell^2/mk^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{-2mE}} = \underline{\underline{\frac{\ell}{\sqrt{2m|E|}}}}$$

Merk: b avh. av både E og ℓ, a kun avh. av E