

Omløpstid T

Vi har vist at "arealhastigheten" er konstant (s.42):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{l}{2m}$$

Integrerer over en periode:

$$\int_0^T \frac{dA}{dt} dt = A = \frac{l}{2m} T$$

For ellipse:  $A = \pi ab \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{l} ab$

$$b = l / \sqrt{2m|E|}, \quad a = k / 2|E|$$

$$\Rightarrow b/l = 1/\sqrt{2m|E|} = 1/\sqrt{2m \frac{k}{2a}} = \sqrt{\frac{a}{mk}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi m a \sqrt{\frac{a}{mk}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{k}}$$

som er Keplers 3. Lov:  $T^2 \sim a^3$

Tidsutviklingen

Vi hadde (fra s.43):

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V - \frac{l^2}{2mr^2})}}$$

Nå er  $V = -k/r$ . Trenger i tillegg uttrykkene for  $a$  og  $b$ , samt  $a^2 - b^2 = a^2 \epsilon^2$ . Får da: (betrakt det ubestemte integralet)

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{-\frac{2|E|r^2}{m} + \frac{2kr}{m} - \frac{l^2}{m^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{k}{|E|}r - \frac{l^2}{2m|E|}}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + 2ar - b^2}}$$

Uttrykket under rottegnet:

$$-r^2 + 2ar - a^2 + a^2 - b^2 = -(r-a)^2 + a^2 \epsilon^2$$

Substituerer:  $r - a = -a \epsilon \cos \xi$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int \frac{(a - a \epsilon \cos \xi) a \epsilon \sin \xi d\xi}{\sqrt{a^2 \epsilon^2 - a^2 \epsilon^2 \cos^2 \xi}}$$

$$= \sqrt{\frac{ma^3}{k}} \int (1 - \epsilon \cos \xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - \epsilon \sin \xi) + \text{konst.}$$

La oss velge initialpunkt slik at konst. = 0.

Da får vi følgende parameterframstilling av  $r(t)$ :

$$r = a(1 - \epsilon \cos \xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{k}} (\xi - \epsilon \sin \xi)$$

Vi ser at  $\xi = 0$  tilsvarer  $t = 0$ , og at partikkelen da er i posisjonen  $a(1 - \epsilon)$ , dvs i perihel.

### 3-10: Spredning i sentralt kraftfelt

55.

Anta at vi har en uniform strøm av partikler (elektroner,  $\alpha$ -partikler, planeter.....) "på vei mot" et kraftsentrum.

Anta lik masse og energi på alle partiklene. Potensialet  $V(r)$  er slik at krafta  $f(r) = -\partial V / \partial r \rightarrow 0$  når  $r \rightarrow \infty$ . Kan generelt ha tiltrekkende eller frastøtende  $V(r)$ .

Beskriver innkommende partikkelstrøm med intensiteten  $I$ :

$I =$  antall partikler gjennom en enhet tverrsnittsareal normalt på strømmen pr. tidsenhet

Partiklenes baner avbøyes fra rettlinjet bevegelse når partiklene passerer kraftsenteret. Etter passering arter etterhvert kreftene som virker på partiklene, og banene blir til slutt rette linjer igjen.

Definerer differensielt spredningstverrsnitt  $\sigma(\Omega)$ :

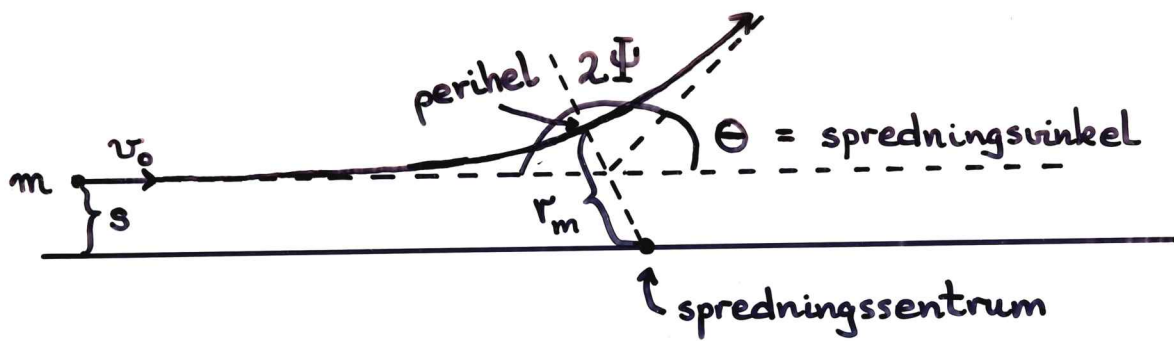
$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{\# \text{ part. spredt inn i romvinkel } d\Omega \text{ pr. tidsenhet}}{\text{innfallende intensitet}} \quad (d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi)$$

$$\text{Dimensjon av } \sigma(\Omega): [\sigma(\Omega)] = \frac{s^{-1}}{m^{-2} s^{-1}} = m^2$$

Sentralkrefter  $\Rightarrow$  symmetri omkring aksene som angir innkommende retning  $\Rightarrow$  kan betrakte  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$  der  $\theta =$  spredningsvinkelen.

Ser på tilfellet med frastøtende potensial.





Hensiktsmessig å innføre støtparameteren  $s$  :

$$l = |\vec{r} \times \vec{p}| \stackrel{r \rightarrow \infty}{=} m v_0 s = m \sqrt{2E/m} s = s \sqrt{2mE}$$

Ved fiksert  $E$  og  $s$  er spredn.vinkelen  $\Theta$  entydig bestemt. [jfr. kvantemekanikk: spredn.vinkel  $\Theta$  måles med en viss sannsynlighet.] Anta at ulike verdier av  $s$  gir spredning til ulike retninger  $\Theta$ .

$\Rightarrow$  # partikler inn mellom  $s$  og  $s+ds$  = # part. ut mellom  $\Theta$  og  $\Theta+d\Theta$

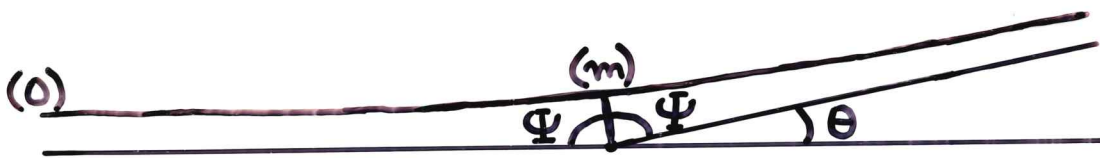
$$\Rightarrow 2\pi I s |ds| = 2\pi \sigma(\Theta) I \sin\Theta |d\Theta|$$

(vil ofte ha  $ds/d\Theta < 0 \Rightarrow$  må sette  $|ds|$  og  $|d\Theta|$ )

$$\Rightarrow \sigma(\Theta) = \frac{s}{\sin\Theta} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|$$

Sammenhengen mellom  $s$  og  $\Theta$  kan finnes ved å gå tilbake til [se s.50; boka bruker  $\Theta$ , "stor teta", for spredn.vinkelen og  $\theta$  for vinkelen til partikkelbanen; vi har brukt opp  $\theta$ , så la oss skrive  $\beta$  for vinkelen til banen! ] :

$$\beta = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2mV}{\hbar^2} - \frac{1}{r^2}}} + \beta_0$$



$$\theta + 2\Psi = \pi$$

$$r_0 = \infty, \text{ tilsvareer } \beta_0 = \pi$$

$$r = r_m, \text{ tilsvareer } \beta = \pi - \Psi$$

$$\Rightarrow \pi - \Psi = \int_{\infty}^{r_m} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\dots}} + \pi$$

$$\Rightarrow \Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\ell^2} - \frac{2mV}{\ell^2} - \frac{1}{r^2}}}$$

$$\ell = s\sqrt{2mE} \Rightarrow 2mE/\ell^2 = 1/s^2; \quad 2mV/\ell^2 = V/Es^2$$

$$\Rightarrow \Psi = \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{s^2} - \frac{V}{Es^2} - \frac{1}{r^2}}} = \int_{r_m}^{\infty} \frac{s dr}{r^2 \sqrt{1 - V/E - s^2/r^2}}$$

$$\text{Subst. } u = 1/r, \quad du = -dr/r^2, \quad u_m = 1/r_m$$

$$\Rightarrow \Psi = \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - V/E - s^2 u^2}}$$

$$\Rightarrow \theta(s) = \pi - 2 \int_0^{u_m} \frac{s du}{\sqrt{1 - V/E - s^2 u^2}}$$

Som regel må  $\theta(s)$  beregnes med numeriske metoder.

Kjenner  $u_m$ ; gitt ved  $1 - V(u_m)/E - s^2 u_m^2 = 0$  siden

$$dr = r^2 \frac{\sqrt{2mE}}{\ell} \sqrt{1 - V/E - s^2/r^2} d\beta, \text{ og i perihel er } dr/d\beta = 0.$$

Skal se på et eksempel der banen kan beregnes analytisk; kan da enkelt beregne  $s(\theta)$  og dermed  $\sigma(\theta)$ .

## Eks: Repulsiv spredning av ladde partikler i Coulombfeltet

Anta positivt ladde partikler med ladning hhv.  $Ze$  og  $Z'e$ :



Anta videre  $M \gg m \Rightarrow$  massesenter ca. ved  $M$ ; antas å ligge i ro i vårt referansesystem (= lab.systemet).

$$\text{Coulombkraft: } f(r) = ZZ'e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\text{Coulombpotensial: } V(r) = ZZ'e^2/4\pi\epsilon_0 r$$

Som Keplerproblemet,  $V = -k/r$ , med  $k = -ZZ'e^2/4\pi\epsilon_0$ .

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) > 0 \quad [E = \frac{1}{2}mv_0^2]$$

$\rightarrow$  hyperbelbane med eksentrisitet

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{ZZ'e^2}\right)^2} > 1$$

$$\text{Da } l^2 = s^2 \cdot 2mE, \text{ blir } 2El^2/m = 4E^2 s^2$$

Tidligere (s.51) hadde vi skrevet kjeglesnittet slik:

$$p/r = 1 + \epsilon \cos \beta$$

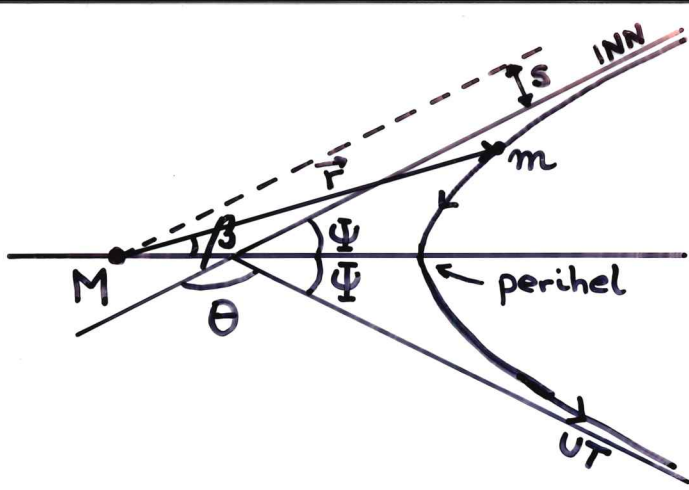
Gyldig for hyperbel, parabel, ellipse;  $p = l^2/mk$  for alle typer.

Nå er  $k < 0$ , dvs  $p < 0$ . (Kan  $(M\hat{a})$  da skrive:

$$|p|/r = \epsilon \cos \beta - 1 \quad (\cos \beta \geq 1/\epsilon)$$

$$|p| = l^2/m|k| = l^2 \cdot 4\pi\epsilon_0/m \cdot ZZ'e^2$$





$$r = \frac{|p|}{\epsilon \cos \beta - 1}$$

Banens asymptoter:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty &\Rightarrow \beta \rightarrow (\pm) \Psi \\ &\Rightarrow \epsilon \cos \Psi - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \cos \Psi = 1/\epsilon \end{aligned}$$

Spredningsvinkel:  $\theta = \pi - 2\Psi$

$$\cos \Psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \cot^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - 1/\epsilon^2}{1/\epsilon^2} = \epsilon^2 - 1$$

$$= \left(2Es \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{zz'e^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cot \frac{\theta}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{2Es}{zz'e^2} \quad [0 < \theta < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cot \frac{\theta}{2} > 0, \text{ ok!}]$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zz'e^2}{2E} \cot \frac{\theta}{2} = s(\theta, E)$$

$$\left|\frac{ds}{d\theta}\right| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zz'e^2}{4E} \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\Rightarrow \sigma(\theta) = \frac{s}{\sin \theta} \left|\frac{ds}{d\theta}\right| = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zz'e^2}{2E}\right)^2 \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{2\sin \theta \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Bruker  $\cot \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$  og  $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$  og får:

$$\underline{\underline{\sigma(\theta) = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zz'e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}}}$$

Rutherford's  
sprednings tverrsnitt

Ikkerelativistisk kvantemekanikk gir samme svar!

Totalt spredningstverrsnitt:

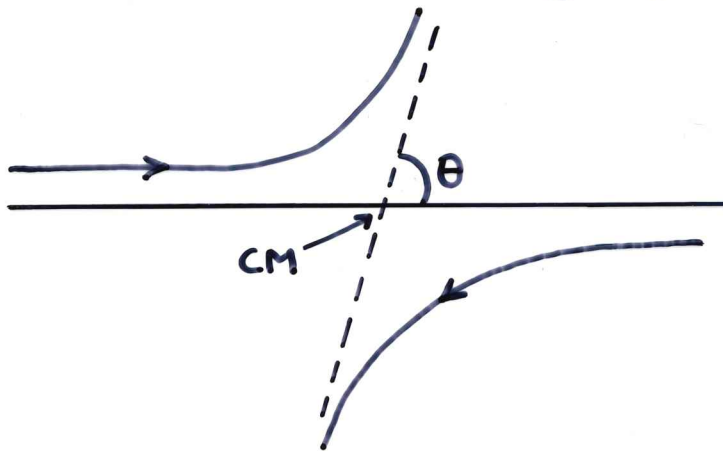
$$\sigma = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta$$

Med Coulombpotensial vil  $\sigma(\theta) \sim 1/\sin^4 \theta/2$ , og  $\sigma \rightarrow \infty$ .  
 Skyldes at Coulombkraften har lang rekkevidde, så uansett hvor stor støtparameter  $s$  en partikkel har, vil den avbøyes og bidra til  $\sigma$ .

Kvantemekanisk: Hvis  $V \rightarrow 0$  forttere enn  $1/r^2$  når  $r \rightarrow \infty$ , vil  $\sigma$  være endelig.

Kommentar:

Vi antok  $M \gg m$  og at massesenteret lå tilnærmet i ro sett ifra lab.systemet. Rutherford's formel gjelder alltid i CM-systemet, med  $\theta =$  vinkelen mellom inn- og utgående partikkel.



I lab.systemet vil vinkelen mellom inn- og utgående partikkel generelt være forskjellig fra  $\theta$ .



Stivt legeme: system av punktmasser underlagt holonome føringer som uttrykker at avstanden mellom to vilkårlig valgte partikler er konstant

Kinematikk: beregelsens natur og karakter

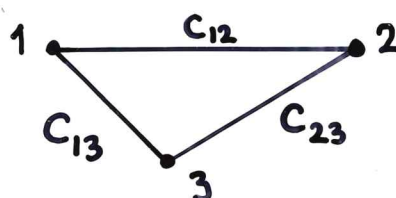
## 4-1: Uavhengige koordinater

Stivt legeme med  $N$  partikler har i utg.punktet  $3N$  frihetsgrader. Kraftig reduksjon pga. føringene  $r_{ij} = c_{ij}$ . Ikke alle  $\frac{1}{2}N(N-1)$  føringer er uavhengige.

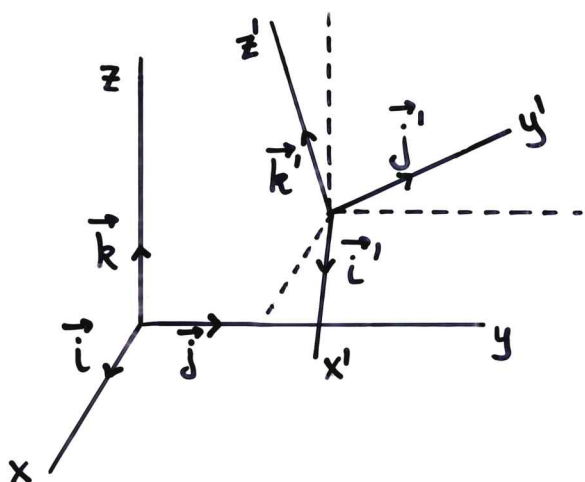
Trenger å angi avstanden til 3 punkter for å spesifisere posisjonen til et vilkårlig punkt. Dermed nok med 3 spesifiserte punkter pluss føringer  $r_{ij} = c_{ij}$  til å kjenne posisjonen til samtlige punkter i det stive legemet.

Antall frihetsgrader blir 6:

- \* 3 koord. for å spesifisere punkt 1
- \* 2 koord. til for å spes. punkt 2 (må ligge på kuleflate med radius  $r_{12} = c_{12}$  sentrert i punkt 1)
- \* 1 koord. til for å spes. punkt 3 (må ligge på sirkel omkring aksel mellom 1 og 2 slik at  $r_{13} = c_{13}$  og  $r_{23} = c_{23}$ )



La  $x, y, z$  være akser i et fast "eksternt" koordinatsystem og  $x', y', z'$  aksene i et koordinatsystem som ligger fast i det stive legemet:



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  enhetsvektorer langs  $x, y, z$

$\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  enhetsvektorer langs  $x', y', z'$

Foruten 3 koord. til å spesifisere origo i  $(x'y'z')$ -systemet relativt til  $(xyz)$ -systemet trengs retningene på  $x', y'$  og  $z'$  i forhold til  $x, y, z$ . Hensiktsmessig å bruke "retningskosene"  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  for å spesifisere retningen på  $x'$ :

$$\alpha_1 = \cos(\vec{i}', \vec{i}) = \vec{i}' \cdot \vec{i}$$

$$\alpha_2 = \cos(\vec{i}', \vec{j}) = \vec{i}' \cdot \vec{j}$$

$$\alpha_3 = \cos(\vec{i}', \vec{k}) = \vec{i}' \cdot \vec{k}$$

Vi har: 
$$\vec{i}' = (\vec{i}' \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{i}' \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{i}' \cdot \vec{k}) \vec{k}$$

Bruker tilsvarende oppskrift med  $\beta$  for  $\vec{j}'$  og  $\gamma$  for  $\vec{k}'$  og får:

$$\vec{i}' = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}$$

$$\vec{j}' = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}$$

$$\vec{k}' = \gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}$$

Kan selvsagt invertere denne prosessen, dvs. uttrykke  $\vec{i}, \vec{j}$  og  $\vec{k}$  ved sine komponenter langs  $\vec{i}', \vec{j}'$  og  $\vec{k}'$ :

$$\vec{i} = (\vec{i} \cdot \vec{i}') \vec{i}' + (\vec{i} \cdot \vec{j}') \vec{j}' + (\vec{i} \cdot \vec{k}') \vec{k}' = \alpha_1' \vec{i}' + \beta_1' \vec{j}' + \gamma_1' \vec{k}'$$

Retningskosene gir sammenhengen mellom vilkårlige vektorer i de to systemene  $(x, y, z)$  og  $(x', y', z')$ . [NB: Anta nå felles origo i de to systemene!]

Eks1: En posisjonsvektor  $\vec{r}$  har  $x'$ -komponent gitt ved

$$x' = \vec{r} \cdot \vec{i}' = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{i}' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$$

Eks2: En vilkårlig vektor  $\vec{G}$  har  $y'$ -komponent

$$G_{y'} = \vec{G} \cdot \vec{j}' = (G_x \vec{i} + G_y \vec{j} + G_z \vec{k}) \cdot \vec{j}' = \beta_1 G_x + \beta_2 G_y + \beta_3 G_z$$

Vi har 9 retningskosener  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ ,  $i=1,2,3$ , men trenger bare 3 koordinater for å spesifisere en orientering av et legeme. Reduksjon v.h.a. ortogonalitetsbetingelser!

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = (\alpha_1 \vec{i}' + \beta_1 \vec{j}' + \gamma_1 \vec{k}')^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = (\alpha_1 \vec{i}' + \beta_1 \vec{j}' + \gamma_1 \vec{k}') \cdot (\alpha_2 \vec{i}' + \beta_2 \vec{j}' + \gamma_2 \vec{k}') = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0$$

etc. etc.

Jalt 6 betingelser som nettopp reduserer antall uavhengige størrelser fra 9 til 3. På kompakt form:

$$\alpha_l \alpha_m + \beta_l \beta_m + \gamma_l \gamma_m = \delta_{lm}$$

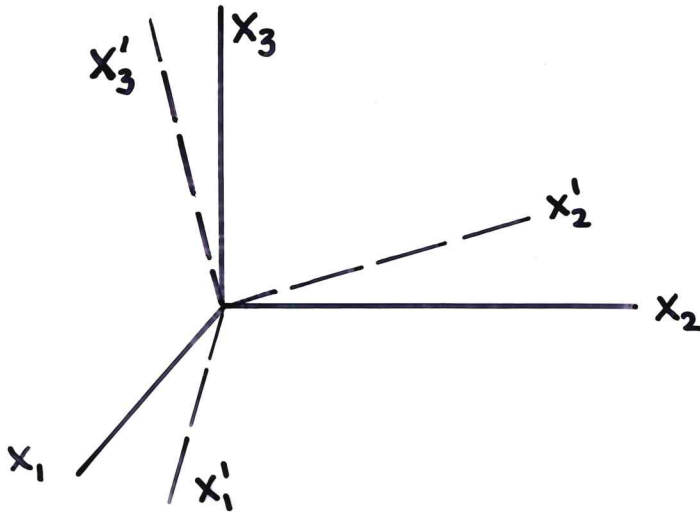
Kan altså ikke bruke retningskosene som generaliserte koord. i f.eks. en Lagrangeformulering, ettersom de ikke er uavhengige.

[Skal se at vi kan formulere sett av tre uavh. funksjoner av retningskosene, jfr. Eulervinklene.] Likevel nyttige størrelser for å beskrive sammenhengen mellom kartesiske koordinatsystemer, jfr. kvantemekanikk og spesiell relativitetsteori.



## 4-2: Ortogonale transformasjoner

La  $x, y, z \rightarrow x_1, x_2, x_3$  ; mer hensiktsmessig notasjon.



Transformasjonene blir da:

$$x'_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$x'_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

$$x'_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3$$

Dette er en lineær transformasjon som generelt skrives:

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$

$$x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

der  $a_{ij}$  er konstante koeffisienter (dvs. uavh. av  $x, x'$ )

Med summekonvensjon:

$$\textcircled{1} \quad x'_i = a_{ij} x_j \quad (i=1,2,3)$$

Lengden av  $\vec{r}$  må være upåvirket av transformasjonen:

$$\Rightarrow x'_i x'_i = x_i x_i \quad \Rightarrow a_{ij} a_{ik} x_j x_k = x_i x_i$$

$$\Rightarrow a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk} \quad \textcircled{2}$$

Setter en inn  $\alpha, \beta, \gamma$  i (2) så ser en umiddelbart at dette er akkurat de 6 betingelsene på s. 63.

Den lineære transf. (1) kalles ortogonal dersom (2) er oppfylt; (2) er ortogonalitetsbetingelsene.

Transformasjonsmatrisen:  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Matriseelementer:  $a_{ij}$

Eks: To dimensjoner

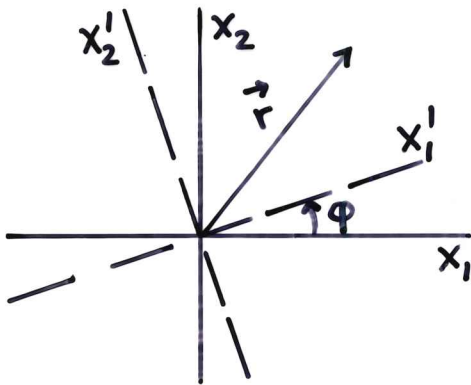
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Ortog. bet.:  $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$

$\therefore$  3 stykker

4 matriseelementer - 3 ortog. bet.

$\Rightarrow$  1 uavhengig størrelse: rotasjonsvinkelen  $\varphi$



$$x_1' = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$$

$$x_2' = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

$$\Rightarrow a_{11} = \cos \varphi, \quad a_{12} = \sin \varphi$$

$$a_{21} = -\sin \varphi, \quad a_{22} = \cos \varphi$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Ortogonalitet:  $a_{11} a_{11} + a_{21} a_{21} = 1$

$$a_{12} a_{12} + a_{22} a_{22} = 1$$

$$a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0$$

$$\therefore \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\therefore \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$\therefore \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0$$

ok!

Transformasjonsligningen  $\vec{r}' = A\vec{r}$  kan betraktes på to måter:

- 1) Passiv betraktningmåte.  $A$  er da en operator som roterer koordinatsystemet (mot klokka i eksemplet på forrige side) mens vektoren  $\vec{r}$  er i ro. Vi finner dermed komponentene av  $\vec{r}$  i det roterte koordinatsystemet.
- 2) Aktiv betraktningmåte.  $A$  oppfattes da som en operator som roterer vektoren  $\vec{r}$  mens koordinatsystemet ligger fast. Vi finner dermed en ny vektor  $\vec{r}'$  i det uendrede koordinatsystemet. (Må rotere vektoren med klokka for å få samme ligninger  $x'_i = a_{ik} x_k$  som ovenfor.)

