4.3: Formelle egenskaper til transformasjonsmatrisen

Se på 2 suksessive transformasjoner:

$$\underbrace{\vec{r} \rightarrow \vec{r}\,'}_{\mathbb{B}} \underbrace{\rightarrow \vec{r}\,''}_{\mathbb{A}}$$

$\Rightarrow \quad x'_k = b_{kj}\, x_j \quad , \quad x''_i = a_{ik}\, x'_k \qquad$ (husk summekonvensjon!)

$\Rightarrow \quad x''_i = a_{ik}\, b_{kj}\, x_j \equiv c_{ij}\, x_j \quad ; \quad c_{ij} = a_{ik}\, b_{kj}$

): To ortogonale transf. $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ etter hverandre er ekvivalent med en tredje lineær transf. $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{B} \qquad \text{(først } \mathbb{B}\text{, deretter } \mathbb{A}\text{)}$$

Kan vises at $\mathbb{C}$ også er en ortogonal transf.
Generelt er $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$, altså <u>ikke kommutativ</u>, mens $(\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$, altså <u>assosiativ</u>.

Så langt: kvadratiske matriser.
Innfører søylematriser:

$$\mathbb{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \mathbb{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Matrisen $\mathbb{A}\mathbb{x}$ blir dermed en søylematrise med elementer

$$(\mathbb{A}\mathbb{x})_i = a_{ij}\, x_j = x'_i = (\mathbb{x}')_i \qquad): \ \mathbb{x}' = \mathbb{A}\mathbb{x}$$

[Har her ikke gjort noe annet enn å skrive vektoren $\vec{r}$ som en (søyle-) matrise $\mathbb{x}$, der antall elementer tilsvarer dimensjonaliteten til rommet vi betrakter.]

Invers transformasjon: $\mathbb{A}^{-1}$, matriseelementer a^{-1}_{ij}
[NB: a^{-1}_{ij} er (i,j)-elementet av $\mathbb{A}^{-1}$; ikke én dividert med (i,j)-elementet av $\mathbb{A}$]

Transformasjonen $\mathbb{A}^{-1}$ skal bringe $\vec{r}\,'$ tilbake til $\vec{r}$:

$$x_i = a^{-1}_{ij}\, x'_j$$

$$\text{>:} \quad x'_k = a_{ki} x_i = a_{ki}\, a^{-1}_{ij}\, x'_j$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_{ki}\, a^{-1}_{ij}}_{\substack{\text{matr. elem. av} \\ \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1}}} = \underbrace{\delta_{kj}}_{\substack{\text{matr. elem.} \\ \text{av } \mathbb{1}}} \qquad \Rightarrow \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Av $x_i = a^{-1}_{ij}\, x'_j = a^{-1}_{ij}\, a_{jk} x_k$ fås $a^{-1}_{ij}\, a_{jk} = \delta_{ik}$, dvs $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{1}$, m.a.o. $\mathbb{A}$ og $\mathbb{A}^{-1}$ <u>kommuterer</u>.

Se på dobbeltsummen $a_{kl}\, a_{ki}\, a^{-1}_{ij}$. Ved å bruke ortog. bet. $a_{kl}\, a_{ki} = \delta_{il}$ blir dette lik a^{-1}_{lj}. Alternativt kan vi bruke at $a_{ki}\, a^{-1}_{ij} = \delta_{kj}$, og dermed blir dobbeltsummen lik a_{jl}. Altså: $a^{-1}_{lj} = a_{jl}$. Men $a_{jl} = \tilde{a}_{lj}$, dvs. (j,l)-elementet av $\mathbb{A}$ er lik (l,j)-elementet av den <u>transponerte</u> matrisen $\tilde{\mathbb{A}}$.

$\Rightarrow$ For ortogonale matriser gjelder: $\mathbb{A}^{-1} = \tilde{\mathbb{A}}$; $\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{1}$

$$\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{1} \Rightarrow \tilde{a}_{ij}\, a_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow a_{ji}\, a_{jk} = \delta_{ik} \quad \text{(sum over 1. indeks)}$$

$$\mathbb{A}\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{1} \Rightarrow a_{ij}\, \tilde{a}_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow a_{ij}\, a_{kj} = \delta_{ik} \quad \text{(sum over 2. indeks)}$$

Determinant: $|\mathbb{A}|$ (forutsetter kvadratisk matrise)

$|\mathbb{A}\mathbb{B}| = |\mathbb{A}|\,|\mathbb{B}|$ (se matematikk fra 2. klasse!)

Da $\tilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{1}$ blir $|\tilde{\mathbb{A}}| \cdot |\mathbb{A}| = 1$, og da determinanten ikke avhenger av ombytte linjer $\leftrightarrow$ spalter, får vi $|\tilde{\mathbb{A}}| = |\mathbb{A}|$. Dermed: $|\mathbb{A}|^2 = 1$, $|\mathbb{A}| = \pm 1$.

Gyldig for alle ortogonale matriser.

4-4: Eulervinklene

Har fra før: de 9 a_{ij} ikke brukbare som gen. koord. fordi de ikke er uavhengige; 6 ortogonalitetsbet. reduserer antall uavh. størrelser til 3.

Én ekstra betingelse: Transformasjonen må være fysisk mulig

$\Rightarrow$ transf. matrisen må framgå kontinuerlig fra enhetsmatrisen

$\Rightarrow |\mathbb{A}| = |\mathbb{1}| = +1$; kan ikke ha $|\mathbb{A}| = -1$

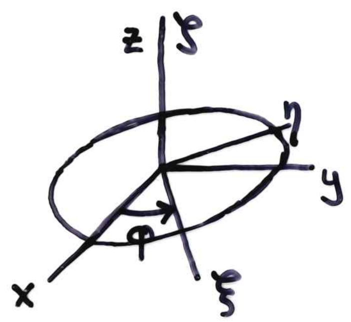
Matrisen $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$ innebærer refleksjon av koordinataksene: $\mathbb{x}' = \mathbb{S}\,\mathbb{x} \Rightarrow x' = -x,\ y' = -y,\ z' = -z$

Må utelates da $|\mathbb{S}| = -1$. Rimelig, ettersom $\mathbb{S}$ gjør et "høyrehånds" system om til "venstrehånds":

Vi må finne 3 uavh. parametre for å spesifisere orienteringen til det stive legemet. Disse må være slik at den tilhørende ortog. transf.matrisen $\mathbb{A}$ har $|\mathbb{A}| = +1$.

Mest vanlig: Eulervinklene, som er 3 suksessive rotasjonsvinkler.

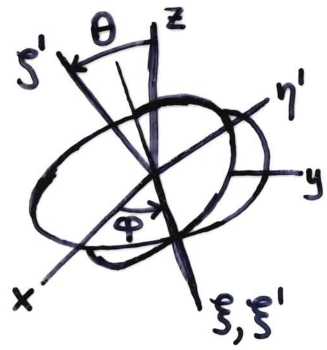
1. $xyz \rightarrow \xi\eta\zeta$ ved rotasjon φ i positiv dreieretning omkring z-aksen:



$$\boldsymbol{\xi} = \mathbb{D}\mathbf{x}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

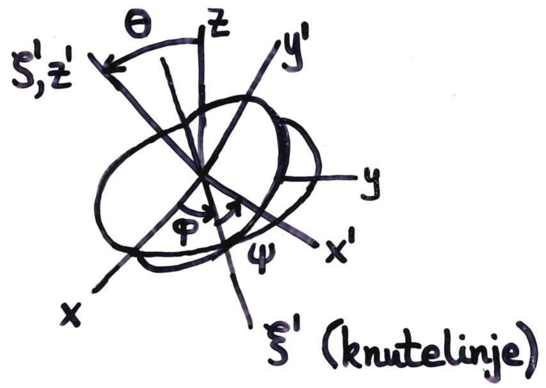
2. $\xi\eta\zeta \rightarrow \xi'\eta'\zeta'$ ved rotasjon θ i pos. dreieretn. om ξ-aksen:



$$\boldsymbol{\xi}' = \mathbb{C}\,\boldsymbol{\xi} \qquad \boldsymbol{\xi}' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix}$$

ξ'-aksen er skjæringslinjen mellom xy- og $\xi'\eta'$-planene

3. $\xi'\eta'\zeta' \rightarrow x'y'z'$ ved rotasjon ψ i pos. dreieretn. om ζ'-aksen:



$$\mathbf{x}' = \mathbb{B}\,\boldsymbol{\xi}' \qquad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}' = \mathbb{A}\mathbf{x} \; ; \; \mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{D}$$

$\mathbb{D}$ beskriver rot. omkring z:

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{C}$ beskriver rot. omkring ξ:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\mathbb{B}$ beskriver rot. omkring ξ':

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

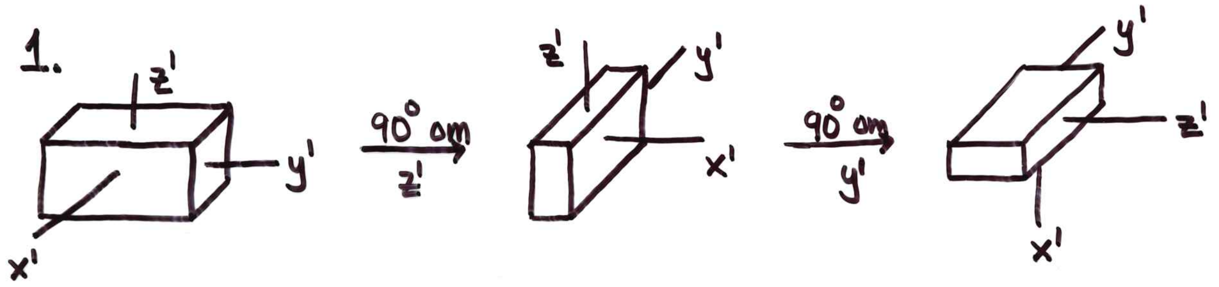
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi, & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi, & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi, & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi, & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \quad , & -\sin\theta\cos\varphi \quad , & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Den inverse transf. $\mathbb{x} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{x}'$ er gitt ved $\tilde{\mathbb{A}}$ som fås ved å la linjer $\leftrightarrow$ søyler i $\mathbb{A}$ (husk: $\mathbb{A}^{-1} = \tilde{\mathbb{A}}$).

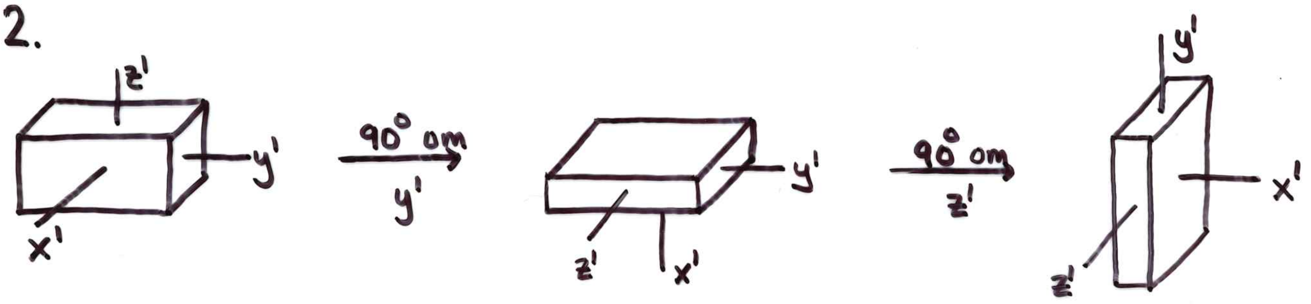
4-8: Infinitesimale rotasjoner

To påfølgende rotasjoner kan beskrives med produkt av to matriser, $\mathbb{A}\mathbb{B}$. Vi vet at matrisemultiplikasjon generelt ikke er kommutativ, dvs $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A}$. Fysisk uttrykker dette at rotasjonenes rekkefølge ikke er likegyldig. Sees best med et eksempel:

1.



2.



Så langt: endelige transformasjoner.

Skal se at <u>infinitesimale</u> transformasjoner er kommutative.

$$x_i' = x_i + \varepsilon_{ij} x_j = (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}) x_j \quad , \quad \varepsilon_{ij} \ll 1$$

På matriseform:

$$\mathbb{x}' = (\mathbb{1} + \mathbb{\epsilon})\mathbb{x}$$

To suksessive inf. transf.:

$$(\mathbb{1} + \mathbb{\epsilon}_1)(\mathbb{1} + \mathbb{\epsilon}_2) = \mathbb{1} + \mathbb{\epsilon}_1\mathbb{1} + \mathbb{1}\mathbb{\epsilon}_2 + \ldots\ldots$$

$$= \mathbb{1} + \mathbb{\epsilon}_1 + \mathbb{\epsilon}_2$$

Da $\mathbb{1} + \mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2 = \mathbb{1} + \mathbb{E}_2 + \mathbb{E}_1$, har vi

$$(\mathbb{1}+\mathbb{E}_1)(\mathbb{1}+\mathbb{E}_2) = (\mathbb{1}+\mathbb{E}_2)(\mathbb{1}+\mathbb{E}_1)$$ ɔ: kommutative

Invers inf. transf.: $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{1} - \mathbb{E}$

fordi $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = (\mathbb{1}+\mathbb{E})(\mathbb{1}-\mathbb{E}) = \mathbb{1} \qquad (+\,\mathcal{O}(\varepsilon^2))$

Ortogonalitet: $\tilde{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{1} + \tilde{\mathbb{E}} = \mathbb{A}^{-1}$

$$\Rightarrow \tilde{\mathbb{E}} = -\mathbb{E} \quad \Rightarrow \tilde{\varepsilon}_{ij} \equiv \varepsilon_{ji} = -\varepsilon_{ij}$$ ɔ: antisymmetrisk

Antisymm. 3×3 matrise : 3 uavh. elementer

Kan skrives på formen

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

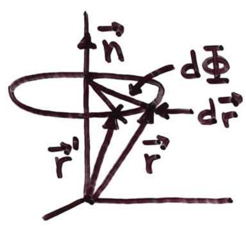
Dermed:

$$\mathbb{x}' - \mathbb{x} \equiv d\mathbb{x} = \mathbb{E}\mathbb{x} = \begin{pmatrix} 0 & d\Omega_3 & -d\Omega_2 \\ -d\Omega_3 & 0 & d\Omega_1 \\ d\Omega_2 & -d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} dx_1 &= x_2\, d\Omega_3 - x_3\, d\Omega_2 \\ dx_2 &= x_3\, d\Omega_1 - x_1\, d\Omega_3 \\ dx_3 &= x_1\, d\Omega_2 - x_2\, d\Omega_1 \end{aligned} \qquad \Rightarrow d\vec{r} = \vec{r} \times d\vec{\Omega}$$

Størrelsen $d\vec{\Omega}$ er en differensiell vektor (<u>ikke</u> differensialet av en endelig vektor), $d\vec{\Omega} = \vec{n}\, d\Phi$



$d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{n}\, d\Phi$ (se s. 32)

4-9: Tidsendring av en vektor

Endringen av en vilkårlig vektor $\vec{G}$ $[=\vec{r}, \vec{v}, \vec{L}, \ldots\ldots]$ vil oppleves forskjellig i legemets faste koordinatsystem og i et eksternt koordinatsystem: $(d\vec{G})_{body} \neq (d\vec{G})_{space}$

Forskjellen skyldes rotasjon av legemets koord.system i det eksterne koord.systemet. Betrakt fiksert vektor i legemet, dvs $(d\vec{G})_{body} = 0$. Da blir

$$(d\vec{G})_{space} = (d\vec{G})_{rot.} = d\vec{\Omega} \times \vec{G} \qquad [\text{Eks: } d\vec{r} = d\vec{\Omega} \times \vec{r}]$$

Generelt:

$$(d\vec{G})_{space} = (d\vec{G})_{body} + d\vec{\Omega} \times \vec{G}$$

Tidsendringene er da relatert ved

$$\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d\vec{G}}{dt}\right)_{body} + \vec{\omega} \times \vec{G}$$

med instantan vinkelhastighet $\vec{\omega} = d\vec{\Omega}/dt$.

Da $\vec{G}$ er en generell vektor, kan vi skrive

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{body} + \vec{\omega} \times \quad ; \quad \text{“operatorrelasjon”}$$

Eks: $\vec{G} = \vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{v}_{space} = \vec{v}_{body} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Mer formell utledning av $\left(\frac{d}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{body} + \vec{\omega}\times$:
(Goldstein s. 175)

$$G_i = a^{-1}_{ij} G'_j = \tilde{a}_{ij} G'_j = a_{ji} G'_j$$

$\uparrow$ komp. langs x_i (i rommet)

$\uparrow$ komp. langs x'_j (i legemet)

I løpet av dt endrer både G'_j og a_{ji} seg

$$\Rightarrow \quad dG_i = a_{ji}\, dG'_j + da_{ji}\, G'_j \qquad ①$$

Legg (xyz) sammenfallende med $(x'y'z')$ ved tidspunkt $t=0$

$\Rightarrow$ komponentene like : $G'_j = G_j$

men differensialene ulike : $a_{ji}\, dG'_j = dG'_i$ [fordi $a_{ji}(t=0) = \delta_{ji}$]

$\therefore\ dG_i = dG'_i + da_{ji} G'_j$

$\mathbb{A} = \mathbb{1}$ ved $t=0$; endres til $\mathbb{1} + \epsilon$ i løpet av dt

$$\Rightarrow \quad da_{ji} = (\tilde{\epsilon})_{ij} = -(\epsilon)_{ij} = -\varepsilon_{ij} \quad \text{(pga. antisymmetri)}$$

Kan bruke Levi-Civita tensoren for å uttrykke ε_{ij} :

$$-\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\, d\Omega_k = \varepsilon_{ikj}\, d\Omega_k \qquad \text{(def. av } \varepsilon_{ijk} \text{ s. 11)}$$

[$\Rightarrow -\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{33} = 0$; $-\varepsilon_{12} = \varepsilon_{132}\, d\Omega_3 = -d\Omega_3$ etc. $\Rightarrow$ OK; se s. 73]

Kan nå skrive ① på formen

$$dG_i = dG'_i + \varepsilon_{ikj}\, d\Omega_k\, G_j$$

$$= dG'_i + [d\vec{\Omega} \times \vec{G}]_i$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{G} = d\vec{G}' + d\vec{\Omega} \times \vec{G}$$; det samme som på s. 74

Ønsker å finne komponentene av $\vec{\omega}$ langs legemets akser x', y', z'. Rotasjonen som svarer til $\vec{\omega}$ kan oppfattes som 3 suksessive rotasjoner med vinkelhastigheter hhv. $\omega_\varphi = \dot{\varphi}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\omega_\psi = \dot{\psi}$.

$\vec{\omega}_\varphi$ tilsvarer rot. omkring z-aksen, dvs $\vec{\omega}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$, og transformerer slik:

$$\vec{\omega}_\varphi{}' = \mathbb{A}\,\vec{\omega}_\varphi$$

Med $\mathbb{A}$ fra s. 71 får vi:

$$(\omega_\varphi)_{x'} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \quad (\omega_\varphi)_{y'} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \quad (\omega_\varphi)_{z'} = \dot{\varphi}\cos\theta$$

$\vec{\omega}_\theta$ tilsv. rot. omkring ξ-, og dermed omkring ξ'-aksen, dvs $\vec{\omega}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, og transf. slik:

$$\vec{\omega}_\theta{}' = \mathbb{B}\,\vec{\omega}_\theta$$

Med $\mathbb{B}$ fra s. 71:

$$(\omega_\theta)_{x'} = \dot{\theta}\cos\psi, \quad (\omega_\theta)_{y'} = -\dot{\theta}\sin\psi, \quad (\omega_\theta)_{z'} = 0$$

Da $\vec{\omega}_\psi$ tilsv. rot. omkring ζ', og dermed omkring z', er ingen transf. nødvendig: $\vec{\omega}_\psi{}' = \vec{\omega}_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$

$\supset$: $(\omega_\psi)_{x'} = 0$
$(\omega_\psi)_{y'} = 0$
$(\omega_\psi)_{z'} = \dot{\psi}$

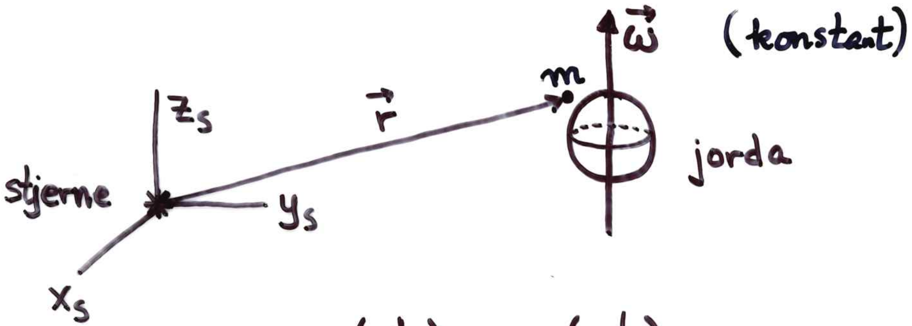
Legges de 3 bidragene sammen, fås:

$$\omega_{x'} = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_{y'} = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$
$$\omega_{z'} = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

4-10: Corioliskraften

Går tilbake til $\left(\frac{d}{dt}\right)_{space} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{body} + \vec{\omega} \times$

La "space"-systemet være et (tilnærmet) inertialsystem fiksert i forhold til våre nærmeste stjerner; indeks s.
"Body"-systemet har akser som roterer med jorda; indeks r (for relativ).



$$\left(\frac{d}{dt}\right)_s = \left(\frac{d}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times$$

Setter inn $\vec{r}$:

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Setter inn $\vec{v}_s$:

$$\left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_s = \left(\frac{d\vec{v}_s}{dt}\right)_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_s$$

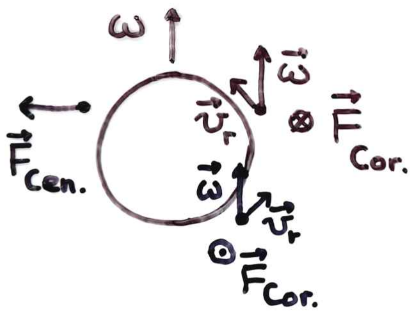
$$= \left[\frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r})\right]_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{a}_s = \vec{a}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Beveg.lign. i inertialsystemet*, $\vec{F} = m\vec{a}_s$, kan nå skrives slik:

$$\vec{F}_{eff} = m\vec{a}_r \; ; \quad \vec{F}_{eff} = \vec{F} + \underbrace{2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}}_{\text{Corioliskraften}} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Sentrifugalkraften}}$$

* Inertialsystem: Newtons lover gjelder

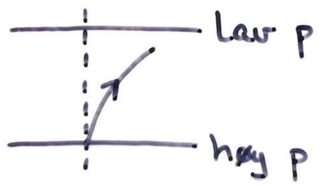


⇒ Avvik mot høyre på nordlige halvkule
venstre på sørlige

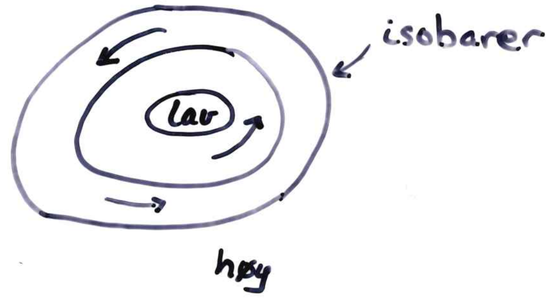
$\omega = 7.29 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$

⊛ Med r = jordradien fås $r\omega^2 = 3.38\ cm/s^2$
= maksimal sentripetalakselerasjon

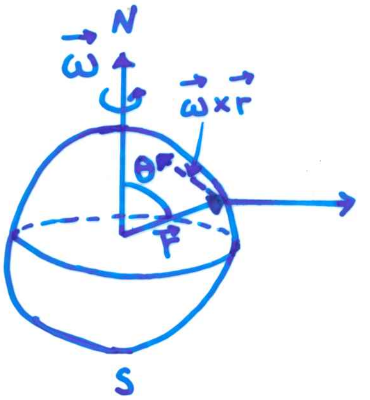
$\vec{F}_{Cor.}$ påvirker vindsystemer:



⇒

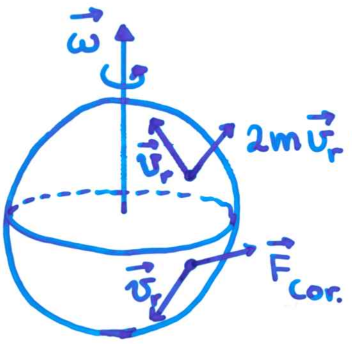


⊛ Her har vi igjen (som på s. 74a) lagt rommets akser sammenfallende med legemets akser ved et gitt tidspunkt.



$-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{F}_{cen.}$; $|\vec{F}_{cen.}| = m\omega^2 r \sin\theta$

⇒ $a_{cen}^{max} = \omega^2 r = 3.38\ cm/s^2$ (ved ekvator)



$2m\vec{v}_r \times \vec{\omega} = \vec{F}_{Cor.}$

$a_{Cor}^{max} = 2 v_r \omega$

$v_r = 1\,km/s \Rightarrow a_{Cor}^{max} = 15\ cm/s^2$