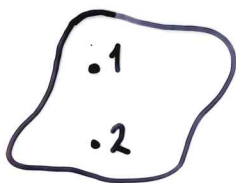


KAP. 5: BEVEGELSESLIGNINGER FOR STIVE LEGEMER

3 kap. 4: uavhengige koordinater (Eulervinklene)
 ortogonale transformasjoner (+matriseregning)
 ∴ "verktøy" for å beskrive stive legemers
 bevegelse

3 kap. 5: dynamikk, bevegelsesligninger, anvendelser

5-1: Dreieimpuls og kinetisk energi



Betrakt rotasjon av stivt legeme.

Vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ er den samme for
 alle punkter i legemet: $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$

(Opplagt!? Formelt bevis i Goldstein s. 190)

Kan derfor si at $\vec{\omega}$ gjelder for legemet som helhet.

Kan legge origo der vi vil; naturlig valg er tyngdepunktet.

Antar videre rotasjon omkring fast punkt, f.eks. CM.

Total dreieimpuls omkring det faste punktet:

$$\vec{L} = m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \quad (\text{summekonv. !})$$

$$\text{Ren rotasjonsbevegelse} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \vec{L} = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = m_i [\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})]$$

Se på komponentene av $\vec{L}$, f.eks. L_x :

$$\begin{aligned} L_x &= m_i [\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)] \\ &= m_i [\omega_x (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i] \end{aligned}$$

$\therefore$ komp. av $\vec{L}$ er lineært relatert til komp. av $\vec{\omega}$

Det kan skrives på formen

$$L_j = I_{jk} \omega_k \quad ; \quad I_{jk} \text{ er treghetsmatrisen (-tensoren)}$$

$$I_{xx} = m_i (r_i^2 - x_i^2)$$

$$I_{xy} = -m_i x_i y_i \quad \text{etc.}$$

Med kontinuerlig fordeling av masse: $m_i \rightarrow \rho(\vec{r})$, $\sum_i \rightarrow \int_V dV$

$$\Rightarrow I_{xx} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 - x^2) dV \quad I_{xy} = - \int_V \rho(\vec{r}) xy dV$$

Ved å la $x, y, z \rightarrow x_1, x_2, x_3$ kan vi skrive generelt:

$$I_{jk} = \int_V \rho(\vec{r}) (r^2 \delta_{jk} - x_j x_k) dV$$

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}$$

$\vec{L}, \vec{\omega}$: vektorer

$\overset{\leftrightarrow}{I}$: matrise, tensor, dyade

Kinetisk energi for bevegelsen omkring det faste punktet:

$$T = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\ = \frac{1}{2} m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Har her brukt $\vec{v}_i (= \vec{v}_{i, \text{space}}) = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, da $\vec{v}_{i, \text{body}} = 0$.

$$\text{Innfører } \vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}$$

$$\text{Kan også skrives som: } T = \frac{1}{2} \omega_j I_{jk} \omega_k = \frac{1}{2} I_{jk} \omega_j \omega_k$$

Med $\vec{n}$ som rotasjonsakse, dvs $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, får vi

$$T = \frac{1}{2} n_j \omega I_{jk} n_k \omega = \frac{1}{2} (n_j I_{jk} n_k) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

der $I \equiv n_j I_{jk} n_k = \vec{n} \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{n}$ er treghetsmomentet omkring rotasjonsaksen.

Av definisjonen s. 79 ser en at $I_{jk} = I_{kj}$, dvs $\overset{\leftrightarrow}{I}$ er en symmetrisk matrise. Videre er alle I_{jk} reelle, og dermed er $\overset{\leftrightarrow}{I}$ hermitesk (selvadjungert), jfr. QM.

$$[\text{Hermitesk operator: } A = A^\dagger \equiv (\tilde{A})^*]$$

Da kan vi alltid diagonalisere $\overset{\leftrightarrow}{I}$, dvs. finne koord. system der $\overset{\leftrightarrow}{I}$ er diagonal:

$$\overset{\leftrightarrow}{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}; \text{ hovedtreghetsmomenter } I_1, I_2, I_3$$

Hovedakser: x_1, x_2, x_3

Dreieimpuls: $L_1 = I_1 \omega_1, L_2 = I_2 \omega_2, L_3 = I_3 \omega_3$

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$

Eks:

Symmetrisk snurrebass: $I_1 = I_2 \neq I_3$

Sfærisk snurrebass: $I_1 = I_2 = I_3 = I$

$$\Rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega}$$

5-5: Eulerligningene (Goldstein s.204-205)

Skal finne bevegelsesligninger for rotasjon av et stivt legeme omkring et fast punkt.

Fra kap. 1: $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \vec{N}$; gjelder i inertialsystemet (dvs i det faste systemet som ikke roterer).

Fra kap. 4: $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{space}} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{body}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Altså, sett fra det roterende koord.systemet (dropp subscript "body"):

$$\underline{\frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{N}}$$

som er Eulerlign. når ett punkt er fiksert.

Eks: Anta legemets akser langs hovedaksene.

$$\Rightarrow L_1 = I_1 \omega_1, L_2 = I_2 \omega_2, L_3 = I_3 \omega_3$$

$$i\text{-komponenten av Eulerlign. : } \dot{L}_i + \epsilon_{ijk} \omega_j L_k = N_i$$

$$\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) = N_1$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) = N_2$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) = N_3$$

5-6: Fri rotasjon av stivt legeme; presesjon
(Goldstein s. 205, 210-212)

$$\begin{aligned}\vec{N} = 0 &\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \\ I_2 \dot{\omega}_2 &= \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2)\end{aligned}$$

Må ha flg. to beveg.konst.: kinetisk energi og total dreieimpuls.

Anta symmetrisk legeme: $I_1 = I_2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= -(I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0\end{aligned}$$

Av siste ligning: $\omega_3 = \text{konstant}$; bestemt ved gitt initialbetingelse

De to første: $\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2$, $\dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1$

der Ω er en vinkel frekvens,

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$$

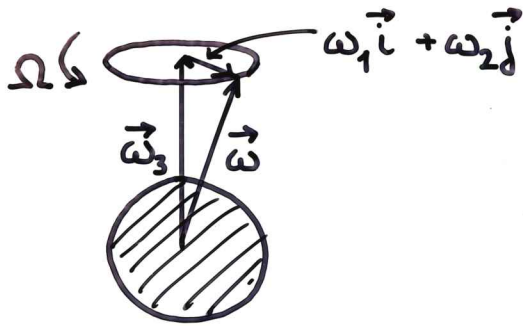
$$\text{Eliminerer } \omega_2 \Rightarrow \ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) = A \cos \Omega t, \quad \omega_2(t) = A \sin \Omega t$$

Dvs: Vektoren $\omega_1 \vec{i} + \omega_2 \vec{j}$ har konstant størrelse og roterer (presesserer) omkring legemets z-akse med vinkel frekvens Ω .

$\vec{\omega}$ er konstant i størrelse og presesserer omkring z-aksen.

Presesjonen er relativt til legemets akser, som selv roterer med høyere vinkel frekvens $\vec{\omega}$.



$$T = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

$$= \frac{1}{2} I_1 A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \quad (\text{konst.})$$

$$L^2 = I_1^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2 \quad (\text{konst.})$$

$\Rightarrow A$ og ω_3 kan uttrykkes ved T og L

Hvis $I_1 \approx I_3$ blir $\Omega \ll \omega$.

Eks: Jorda.

Flatttrykt ved polene $\Rightarrow I_3 > I_1 = I_2$

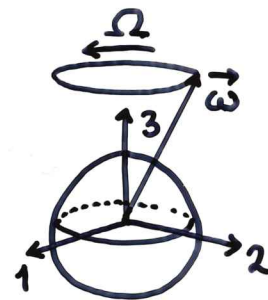
$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \approx \frac{1}{300} \omega_3$$

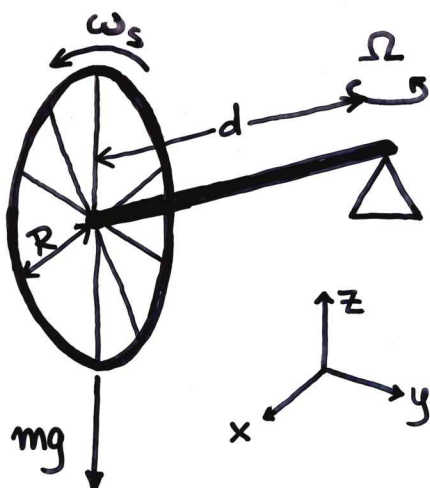
$$\frac{2\pi}{\omega_3} = 1 \text{ døgn}$$

$$\Rightarrow \text{Presesjonsperiode: } \frac{2\pi}{\Omega} \approx \frac{2\pi}{\omega_3} \cdot 300 = 300 \text{ døgn}$$

Målt verdi: 440 døgn ("Chandler wobble")

Avvik antas å skyldes at jorda ikke er et perfekt stivt legeme



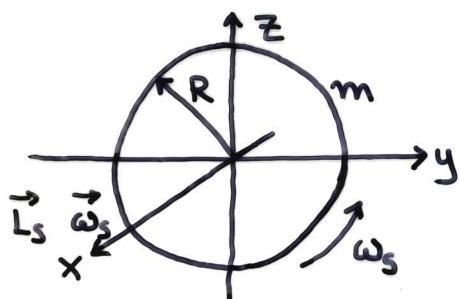
Eks: Gyroskopeffekt

Hjul orientert vertikalt, i yz -planet. Enden på akslingen hviler fritt på et støttepunkt.

Når hjulet roterer hurtig, med vinkel frekvens ω_s , vil det presessere i horisontalplanet med vinkel frekvens Ω .

$$\vec{\omega}_s = \omega_s \hat{x} ; \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}, \quad I_x = \int dm (r^2 - x^2) = mR^2$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = \vec{I} \vec{\omega}_s = I_x \omega_s \hat{x} = mR^2 \omega_s \hat{x}$$



Har for enkelhets skyld antatt masseløse eiker i hjulet. Lar koord.systemet xyz ligge fast i forhold til hjulets aksling. (som også har masse $\ll m$)

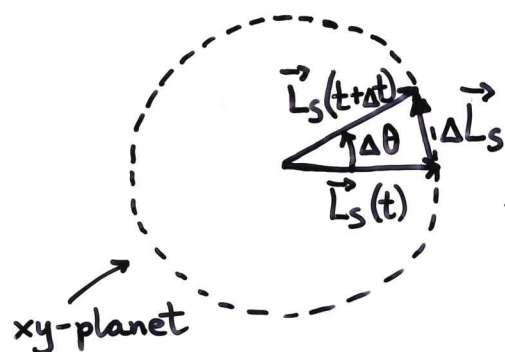
Tyngdekrafta fører til et kraftmoment omkring støttepunktet:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = d\hat{x} \times mg(-\hat{z}) = mgd\hat{y}$$

Kraftmomentet fører til at $\vec{L}_s$ endrer seg (i lab.systemet):

$$d\vec{L}_s = \vec{N} dt$$

Ser nærmere på $d\vec{L}_s$, som er parallell med $\vec{N}$, dvs parallell med $\hat{y}$, og dermed $\perp \vec{L}_s$ ($\Rightarrow \vec{L}_s$ roterer i horisontalplanet)



$$|\Delta \vec{L}_s| \approx |\vec{L}_s| \Delta \theta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{d\vec{L}_s}{dt} \right| = |\vec{L}_s| \frac{d\theta}{dt} = m R^2 \omega_s \cdot \Omega$$

Da kan vi bestemme presesjonshastigheten Ω :

$$\left| d\vec{L}_s/dt \right| = |\vec{N}|$$

$$\Rightarrow m R^2 \omega_s \Omega = mgd$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega = gd / R^2 \omega_s} \quad (\text{ert. } \Omega = mgd / I_0 \omega_s ; \text{ treghetsmom. } I_0)$$

Tallverdier for Lekegyroskop:

$$R \approx 22 \text{ mm}, d \approx 32 \text{ mm}, g \approx 10 \text{ m/s}^2, \Omega \sim 1 \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \omega_s \approx \frac{10^4 \cdot 32}{484 \cdot 1} \text{ s}^{-1} \approx \frac{2}{3} \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \approx 700 \text{ s}^{-1}$$

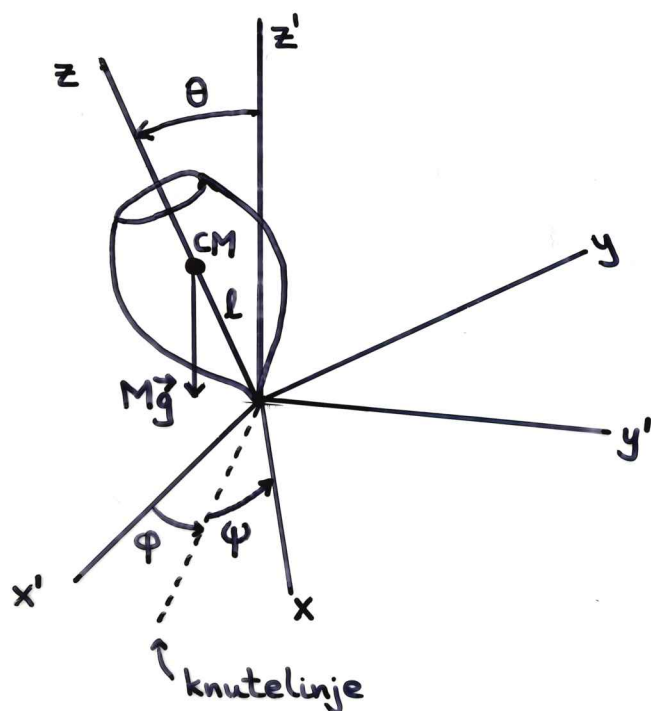


$$\left. \begin{array}{l} v_{\text{snor}}^{\text{max}} \sim 10 \text{ m/s (?) } = 10^3 \text{ cm/s} \\ \text{akslingens omkrets} \approx 1.5 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_s \sim \frac{1}{1.5} \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \approx 700 \text{ s}^{-1}$$

$\Rightarrow$ rimelig samsvar mellom teori og eksperiment !

Friksjon $\Rightarrow \omega_s$ avtar $\Rightarrow \Omega$ øker

Eks: Symmetrisk snurrebass med ett punkt fiksert
(Goldstein kap. 5-7)



Symmetrisk snurrebass spinner omkring en hovedakse; påvirkes av tyngdens akselerasjon $\vec{g}$; ett punkt på symmetriaksen er fiksert.

Koordinatsystem:

$x'y'z'$: fast i rommet, slik at $\vec{g} = -g\hat{z}'$

xyz : fast i snurrebassen, slik at z -aksen er symmetriaksen

Symmetrisk snurrebass $\Rightarrow I_1 = I_2 \neq I_3$ ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$)

Kinetisk energi: $T = \frac{1}{2} I_j \omega_j^2 = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$

Bruker Eulervinklene φ, θ, ψ som (generaliserte) uavh. koordinater.

Fra s. 75:

$$\omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2, \quad \omega_3^2 = (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

Potensiell energi:

$$V = -m_i \vec{r}_i \cdot \vec{g} = -M \vec{R} \cdot \vec{g} = Mgl \cos \theta \quad (\vec{R} = l \hat{z})$$

Lagrangefunksjon:

$$L = T - V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - Mgl \cos \theta$$

L uavh. av ϕ og $\psi \Rightarrow \phi, \psi$ sykliske koordinater $\Rightarrow$ tilhørende generaliserte impulser p_ϕ, p_ψ er tidskonstanter.

Kan sees ved fysisk betraktning: $\vec{N} = \vec{R} \times M\vec{g}$ har retning langs knutelinjen, mens z og z' begge står $\perp$ på knutelinjen. Dermed ingen komponent av $\vec{N}$ langs z og $z' \Rightarrow$ ingen endring i dreieimpulsen omkring z og z' .

$$\left. \begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = I_1 a \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = I_1 b \end{aligned} \right\} \text{ definerer } a, b$$

J tillegg: energibevarelse pga. konservativt system

$$E = T + V = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{I_3}{2} \omega_3^2 + Mgl \cos \theta$$

$$\text{Fra } p_\psi : I_3 \dot{\psi} = I_1 a - I_3 \dot{\phi} \cos \theta$$

$$\text{Innsatt i uttr. for } p_\phi : I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_1 a \cos \theta = I_1 b$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I_1 a}{I_3} - \cos \theta \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\Rightarrow E' \equiv E - \underbrace{\frac{I_3}{2} \omega_3^2}_{\text{konst.}} = \frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta$$

$\therefore$ som et ekvivalent 1-dimensjonalt problem i variabelen θ , med effektivt potensial $V'(\theta) = Mgl \cos \theta + \frac{I_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}$

Substituerer $u = \cos \theta$ og innfører nye konstanter $\alpha = 2E'/I_1$ og $\beta = 2Mgl/I_1$. Lign. for E' kan da omskrives:

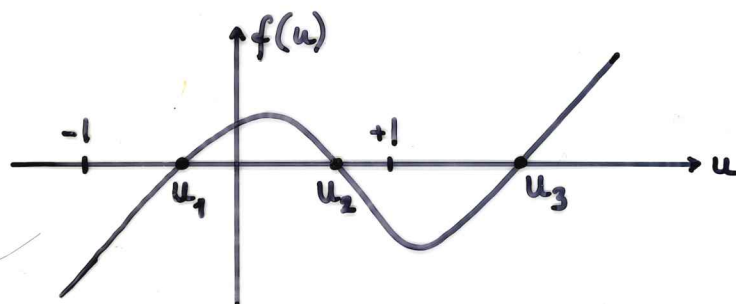
$$E' = \frac{I_1}{2} \frac{\dot{u}^2}{\sin^2 \theta} + \frac{I_1}{2} \frac{(b-au)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl u$$

$$\stackrel{\sin^2 \theta = 1-u^2}{\Rightarrow} E'(1-u^2) = \frac{I_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{I_1}{2} (b-au)^2 + Mgl u (1-u^2)$$

$$\Rightarrow \alpha(1-u^2) = \dot{u}^2 + (b-au)^2 + \beta u(1-u^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{u}^2 &= (1-u^2)(\alpha - \beta u) - (b-au)^2 \\ &= \beta u^3 - (\alpha + a^2)u^2 + (2ab - \beta)u + \alpha - b^2 \equiv f(u) \end{aligned}$$

Røtter av høyre side gir $\dot{u} = 0$, dvs $\dot{\theta} = -\dot{u}/\sin \theta = 0$, dvs ved hvilke vinkler θ skifter fortegn.



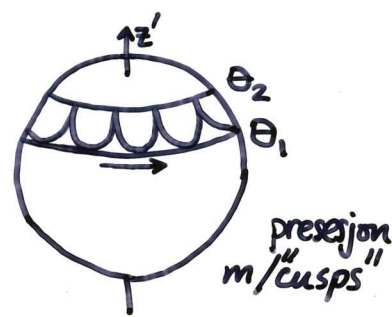
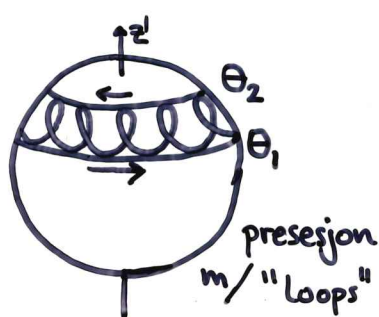
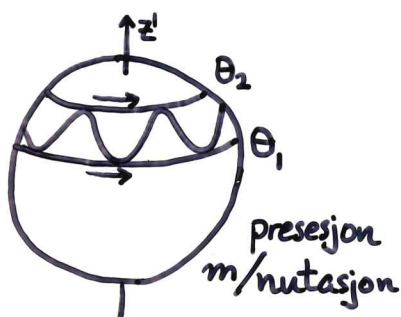
$$f(\pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \pm \infty} f(u) = \pm \infty$$

$\Rightarrow$ må ha rot $u_3 > 1$, ufysisk!

Kun fysisk akseptable verdier for $f(u) = \dot{u}^2 \geq 0$, dvs mellom u_1 og u_2 (som begge ligger mellom -1 og $+1$), dvs vinkelen θ antar verdier slik at $\cos \theta$ ligger mellom u_1 og u_2 .

Kan illustrere beregelsen med linjen som z -aksen tegner på overflaten av en enhetskule med sentrum i det faste punktet.



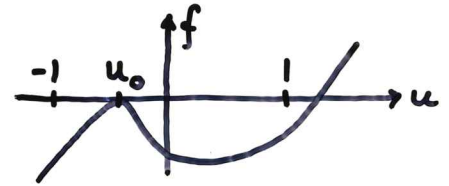
Hva skal til for å få en virkelig regulær presesjon?

$$\therefore \Theta(t) = \Theta(t=0) \equiv \Theta_0$$

$$\therefore \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_0$$

$$\therefore f(u) \text{ må ha dobbel rot i } u_0 = \cos \Theta_0$$

$$\therefore f(u_0) = 0, \quad df(u_0)/du = 0$$



$$f(u_0) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta u_0 = \frac{(b - a u_0)^2}{1 - u_0^2} \quad (1)$$

$$\frac{df(u_0)}{du} = 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{a(b - a u_0)}{1 - u_0^2} - u_0 \frac{\alpha - \beta u_0}{1 - u_0^2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ innsatt i } (2) \Rightarrow \frac{\beta}{2} = a \frac{b - a u_0}{1 - u_0^2} - u_0 \left(\frac{b - a u_0}{1 - u_0^2} \right)^2$$

$$\text{Fra s. 87 har vi at } \dot{\varphi} = \frac{b - a \cos \Theta_0}{\sin^2 \Theta_0} = \frac{b - a u_0}{1 - u_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2} = a \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \cos \Theta_0$$

$$\text{Med } \beta = 2Mgl/I_1 \text{ og } a = \frac{I_3 \omega_3}{I_1} = \frac{I_3}{I_1} (\dot{\Psi} + \dot{\varphi} \cos \Theta_0) \text{ får vi}$$

$$Mgl = \dot{\varphi} (I_3 \omega_3 - I_1 \dot{\varphi} \cos \Theta_0)$$

ert.

$$Mgl = \dot{\varphi} (I_3 \dot{\Psi} - (I_1 - I_3) \dot{\varphi} \cos \Theta_0)$$

$$\rightarrow \text{Kvadratisk lign. i } \dot{\varphi}: I_1 \cos \Theta_0 \dot{\varphi}^2 - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} + Mgl = 0$$

Løsning:

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 \omega_3 \pm \sqrt{I_3^2 \omega_3^2 - 4 Mgl I_1 \cos \Theta_0}}{2 I_1 \cos \Theta_0}$$

Krever $\dot{\varphi}$ reell

$$\Rightarrow I_3^2 \omega_3^2 > 4 Mgl I_1 \cos \Theta_0$$

$$\Theta_0 > \pi/2 \Rightarrow \cos \Theta_0 < 0 \Rightarrow \text{regulær pres. mulig for vilkårlig } \omega_3$$

$$\Theta_0 < \pi/2 \Rightarrow \cos \Theta_0 > 0 \Rightarrow \text{regulær pres. mulig for } \omega_3 > \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl I_1 \cos \Theta_0}$$

De to røttene for $\dot{\phi}$ betegnes gjerne "langsom" og "rask" presesjon.

Gå tilbake til $Mgl = \dot{\phi} (I_3 \omega_3 - I_1 \dot{\phi} \cos \theta_0)$.

Langsom presesjon $\Rightarrow I_1 \dot{\phi} \cos \theta_0 \ll I_3 \omega_3$

$$\Rightarrow \dot{\phi} \approx Mgl / I_3 \omega_3$$

Rask presesjon $\Rightarrow Mgl \ll$ leddene på høyre side

$$\Rightarrow \dot{\phi} \approx I_3 \omega_3 / I_1 \cos \theta_0$$

~~~~~

Når  $f(u=1) = 0$ , dvs  $\theta = 0$  er en "venderinkel":

Anta  $\theta = 0$  ved  $t = 0$ . Da er  $p_\phi = p_\psi$ , og dermed  $a = b$ . (se s. 87)

Får da for  $E'$ :

$$E' = E - \frac{I_3}{2} \omega_3^2 = \underbrace{\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2}_{=0} + \underbrace{\frac{I_1 a}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}_{=0} + Mgl = Mgl$$

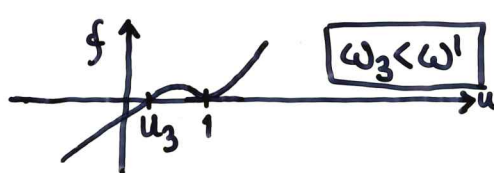
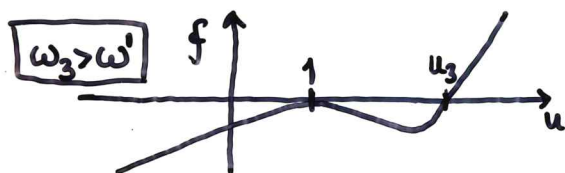
$$\Rightarrow \alpha \equiv 2E' / I_1 = 2Mgl / I_1 = \beta$$

$$\Rightarrow \dot{u}^2 = (1 - u^2) \beta (1 - u) - a^2 (1 - u)^2 = (1 - u)^2 \{ \beta (1 + u) - a^2 \}$$

$$\Rightarrow u = 1 \text{ er dobbel rot; } u_3 = \frac{a^2}{\beta} - 1$$

$$\frac{a^2}{\beta} > 2 \text{ (rask pres.)} \Rightarrow u_3 > 1 \Rightarrow \text{kun mulig med } u = 1, \text{ dvs } \theta = 0$$

$$\frac{a^2}{\beta} < 2 \Rightarrow u_3 < 1 \Rightarrow \text{nutasjon mellom } \theta = 0 \text{ og } \theta = \theta_3$$



(Husk:  $f = \dot{u}^2 \geq 0$ )

Grensetilfellet:  $\frac{a^2}{\beta} = 2 \Rightarrow \frac{I_3^2 \omega'^2}{2Mgl I_1} = 2 \Rightarrow \omega' = \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl I_1}$