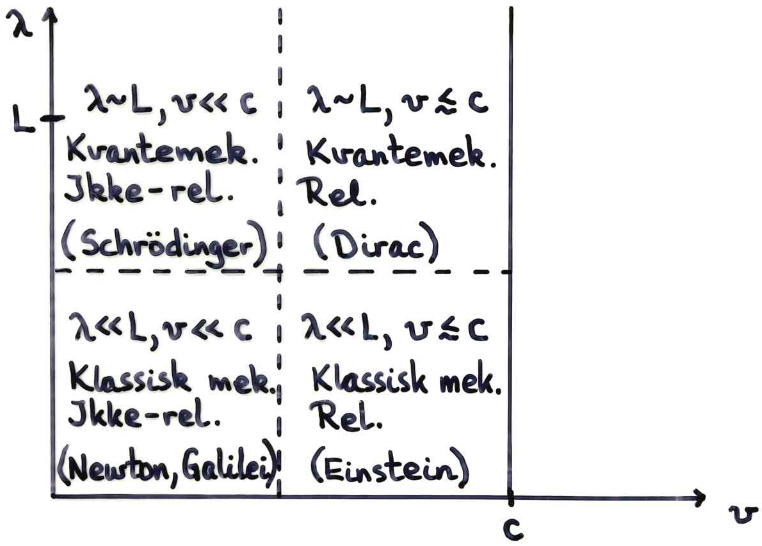
KAP. 7: SPESIELL RELATIVITETSTEORI

1. Innledning

Anta: L = typisk lineær utstrekning av systemet
$\lambda = h/p$ = de Broglie bølgelengde for et legeme i systemet med impuls p (h = Plancks konstant)
v = typisk hastighet til legeme i systemet
c = lyshastigheten



Skal her se nærmere på systemer med $\lambda \ll L$ og $v \lesssim c$, som beskrives med <u>Einsteins spesielle relativitetsteori</u>.

[Generell relativitetsteori: gravitasjon, akselererte ref. systemer; også Einstein!]

Skal <u>ikke</u> gå særlig inn på:

- tidlige eksperimenter (Michelson-Morley etc.)
- filosofiske betraktninger
- tilsynelatende paradokser

Målet er derimot:

- å benytte formalisme og begrepsapparat fra klassisk mekanikk til å beskrive den spesielle relativitetsteorien

Kort rekapitulering:

Inertialsystem: referansesystem der Newtons lover gjelder
$$[\vec{F} = d\vec{p}/dt]$$

Galileitransformasjonen:

antar to inertialsystemer S' og S, der S' beveger seg med hastighet $\vec{v}$ relativt til S. Et legemes koordinater $\vec{r}\,'$ og $\vec{r}$ og tidspunkter t' og t observert i hhv. S' og S er da relatert ved $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}\cdot t$, $t' = t$

Problem:

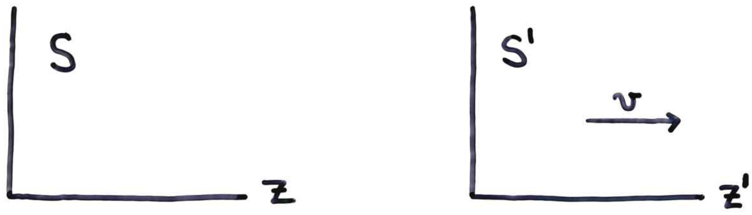
Galileitransf. forutsier <u>forskjellig</u> lyshastighet i S' og S: $c' = c - v$ $[c' = dr'/dt = dr/dt - v = c - v]$.
Eksperimentelt er lyshastigheten den samme i S' og S, dvs. $c' = c$, uavh. av relativ hastighet v [Michelson-Morley, Kennedy-Thorndike, Alväger et al.]

⟹ Einsteins to grunnleggende postulater:

1. Fysikkens lover er de samme i alle intertialsystemer ("relativitetsprinsippet"; også tilfredsstilt i Newton-mekanikk)

2. Lyshastigheten i vakuum har samme konstante verdi i alle inertialsystemer og er uavh. av lyskildens bevegelse (skiller relativitetsteorier fra andre teorier)

2. Lorentztransformasjonen



To inertialsystemer S, S'. S' beveger seg med hastighet $\vec{v}$ relativt til S. Antar felles origo ved $t = t' = 0$, dessuten $\vec{v}$ parallell med z-aksen.

Lorentztransf.:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma(z - vt), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2} z\right)$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c$$

Invers transf. : $v \to -v$

Ser at transf. lign. er lineære.

Lorentztransf. gjør at lyshastigheten c er invariant, dvs. den samme sett ifra de to systemene S og S'. La oss vise dette:

Anta punktkilde i origo i S' som emitterer en lysbølge ved $t=0$. Ligning for lysfronten:

$$r' = ct'$$

$$\therefore (r')^2 = c^2(t')^2$$

$$\therefore (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2$$

Skal se at vi får samme ligning for lysfronten i S:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x^2 + y^2 + \gamma^2 (z - vt)^2 - c^2\gamma^2\left(t - \frac{v}{c^2} z\right)^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 + \gamma^2(z^2 - 2vzt + v^2t^2) - c^2\gamma^2\left(t^2 - \frac{2v}{c^2} zt + \frac{v^2}{c^4} z^2\right)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - z^2 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1-\beta^2} + \frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)}_{=0} - z\underbrace{(2v\gamma^2 t - 2v\gamma^2 t)}_{=0} + \gamma^2 t^2 (v^2 - c^2)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \underbrace{\gamma^2 (1 - v^2/c^2)}_{=1}$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

Dvs: Hvis $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$, så er også $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

Dvs: Lysfronten beveger seg med hastighet c i både S' og S.

For $v \ll c$: $x' = x$, $y' = y$, $z' = z - vt$, $t' = t$

ↄ: Lorentztransf. $\xrightarrow{v \ll c}$ Galileitransf.

Invers transformasjon:

$$x = x', \quad y = y', \quad z = \gamma(z' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2} z'\right)$$

[Opplagt! Må kunne la $v \to -v$ ettersom S beveger seg med hastighet $-v$ relativt til S'. Finnes også ved å løse ut for z og t fra transf. lign. for z' og t'.]

Vektorform:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + [\gamma(z - vt) - z]\frac{\vec{v}}{v}$$

Da $\vec{v}\cdot\vec{r} = vz$, blir $z = \frac{1}{v}\vec{v}\cdot\vec{r}$

$$\Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} + \left[(\gamma - 1)\frac{1}{v}\vec{v}\cdot\vec{r} - \gamma v t\right]\frac{\vec{v}}{v}$$

$$\Rightarrow \vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma - 1)\frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma c t \vec{\beta} \qquad (\vec{\beta} = \vec{v}/c)$$

Tilsvarende for t':

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma v}{c^2} z = \gamma t - \frac{\gamma}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{r}$$

$$= \gamma t - \frac{\gamma}{c} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{r} = \gamma t - \frac{\gamma}{c} \vec{\beta} \cdot \vec{r}$$

Da Lorentztransf. er lineær, kan vi bruke ideer og formel-apparat fra kap. 4.

Innfører en "4. dimensjon" med variabelen

$$x_4 = ict$$

ɔ: vi innfører 4-dimensjonalt <u>Minkowskirom</u> med akser

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

Størrelsen som vi beregnet på s. 111 blir da:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu x_\mu \equiv x_\mu x_\mu$$

(med summekonvensjon: sum over repeterte indekser)

Vektor i Minkowskirommet: 4-vektor

Standard notasjon i den forbindelse:

greske indekser for 4-vektorer $(\alpha, \beta, \mu \ldots.)$

romanske indekser for 3-vektorer $(i, j, k \ldots.)$

Kan nå uttrykke invarians av lyshastigheten ved å si at

$x_\mu x_\mu$ er en invariant

M.a.o:

<u>Normen</u> av "posisjonsvektoren" i Minkowskirommet ("4-rommet") er konstant under en Lorentztransformasjon.

Fra kap. 4-2 (s. 64-65): en lineær transformasjon som ikke endrer vektorens lengde (størrelse, norm) er en såkalt <u>ortogonal</u> transformasjon

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Lorentztransformasjonen er en ortogonal transf. i Minkowskirommet}}$

Lorentztransf. på matriseform:

$$\mathbb{X}' = \mathbb{L}\,\mathbb{X} \qquad \text{evt.} \qquad x'_\mu = L_{\mu\nu}\, x_\nu$$

Vi valgte relativ hastighet v langs z-aksen: $\vec{v} = v\hat{z} = v\hat{x}_3$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{transformasjonsmatrisen}$$

[Hvis vi har $\vec{v}$ i vilkårlig retning, må vi gå tilbake til de generelle vektoruttrykkene på s. 111 og 112:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma-1)\frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\,\vec{\beta}}{\beta^2} - \gamma c t\,\vec{\beta} \qquad (\vec{\beta} = \vec{v}/c)$$

$$t' = \gamma t - \frac{\gamma}{c}\,\vec{\beta}\cdot\vec{r}$$

$$\Rightarrow x'_j = x_j + (\gamma-1)\frac{(\beta_k x_k)\,\beta_j}{\beta^2} + i\gamma x_4 \beta_j$$

$$x'_4 = \gamma x_4 - i\gamma\beta_k x_k \qquad (j,k = 1,2,3)$$

$$\Rightarrow L_{jk} = \delta_{jk} + (\gamma-1)\frac{\beta_j\beta_k}{\beta^2} \quad ; \quad L_{j4} = i\gamma\beta_j$$

$$L_{4k} = -i\gamma\beta_k \quad ; \quad L_{44} = \gamma$$]

Fra kap. 4 har vi også:

For ortogonal matrise gjelder $\mathbb{L}^{-1} = \tilde{\mathbb{L}}$

(transponert av $\mathbb{L}$)

Invers Lorentztransformasjon kan derfor skrives slik:

$$x_\mu = L^{-1}_{\mu\nu} x'_\nu = \tilde{L}_{\mu\nu} x'_\nu = L_{\nu\mu} x'_\nu$$

Kan umiddelbart skrive ned den inverse transf. matrisen:

$$\mathbb{L}^{-1} = \tilde{\mathbb{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad (\text{for } v \text{ langs } x_3)$$

ɔ: invers Lorentztransf. tilsvarer å la $v \to -v$ (som vi har sett før).

—— · ——

Fra eksemplet s. 65 har vi at matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

representerer rotasjon en vinkel φ i et todim. plan.

Dermed kan Lorentztransf. oppfattes som en rotasjon i x_3x_4-planet gjennom en imaginær vinkel φ bestemt ved

$$\gamma = \cos\varphi$$
$$i\beta\gamma = \sin\varphi$$

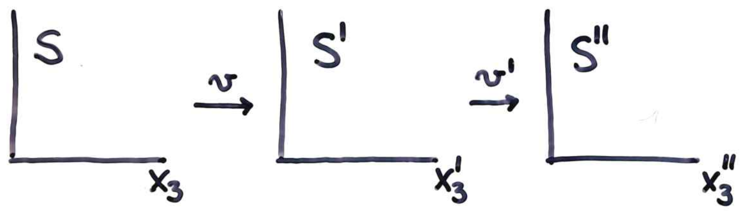
(Vi har $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} - \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1$, OK!)

Alternativt kan vi innføre en reell vinkel ψ: $\quad \varphi = i\psi$

$$\Rightarrow \gamma = \cos\varphi = \cos i\psi = \tfrac{1}{2}(e^{-\psi} + e^{\psi}) = \cosh\psi$$
$$i\beta\gamma = \sin\varphi = \sin i\psi = \tfrac{1}{2i}(e^{-\psi} - e^{\psi}) = i\cdot\tfrac{1}{2}(e^{\psi} - e^{-\psi}) = i\,\sinh\psi$$

Hva er poenget med dette? Kan brukes til å forenkle sammensatte transformasjoner!

<u>Eks: Einsteins addisjonsformel</u>



$$\mathbb{x}' = \mathbb{L}\,\mathbb{x}\,, \quad \mathbb{x}'' = \mathbb{L}'\,\mathbb{x}'\,, \quad \mathbb{x}'' = \mathbb{L}''\,\mathbb{x}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L}'' = \mathbb{L}'\,\mathbb{L}$$

Kan nå multiplisere $\mathbb{L}'$ og $\mathbb{L}$ og finne at $\mathbb{L}''$ tilsvarer rotasjonen $\varphi'' = \varphi' + \varphi$. Ses vel også direkte: Da $\mathbb{L}'$ og $\mathbb{L}$ begge tilsvarer rotasjon i det samme planet, må vi ha $\varphi'' = \varphi' + \varphi$.

Se nå på $\tan\varphi'' = \dfrac{\sin\varphi''}{\cos\varphi''} = \dfrac{i\beta''\gamma}{\gamma} = i\beta''$:

$$\tan\varphi'' = \tan(\varphi'+\varphi) = \frac{\sin(\varphi'+\varphi)}{\cos(\varphi'+\varphi)} = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi + \cos\varphi'\sin\varphi}{\cos\varphi'\cos\varphi - \sin\varphi'\sin\varphi}$$

$$= \frac{\tan\varphi' + \tan\varphi}{1 - \tan\varphi\tan\varphi'}$$

$$\Rightarrow \quad i\beta'' = i\,\frac{\beta' + \beta}{1 + \beta\beta'}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v'' = \frac{v' + v}{1 + vv'/c^2}}$$ som er Einsteins addisjonsformel

Ser at

1) $v'' \neq v + v'$, som ville ha vært det ikkerel. resultatet

2) $v'' < c$, selv for $v \lesssim c$ og $v' \lesssim c$

<u>Generell</u> transf. i Minkowskirommet (som bevarer c):

$$\mathbb{x}' = \mathbb{L}\,\mathbb{x} + \mathbb{a} \qquad \text{(Poincaré transf. / Inhomogen Lorentztransf.)}$$

Her er

$\mathbb{L}$ = ortogonal matrise

$\mathbb{a}$ = 4-dim. translasjonsvektor (:: skifte av origo: romlig translasjon + omdefinering av nullpunkt for tid)

Ortogonalitet: $\mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}} = \tilde{\mathbb{L}}\mathbb{L} = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ 10 betingelser for elementene i $\mathbb{L}$

$\Rightarrow$ $16-10=6$ uavhengige elementer i $\mathbb{L}$

Med 4 uavh. komponenter i $\mathbb{a}$ fås totalt $6+4=10$ uavh. elementer i en Poincaré-transformasjon.

<u>Homogen</u> Lorentztransf.: $\mathbb{x}' = \mathbb{L}\,\mathbb{x}$; 6 uavh. elementer

Ser kun på homogene Lorentztransf. i fortsettelsen.

Ortogonal $\mathbb{L}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{1} = \mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}}$ $\Rightarrow$ $1 = |\mathbb{1}| = |\mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}}| = |\mathbb{L}|\cdot|\tilde{\mathbb{L}}| = |\mathbb{L}|^2$

$\Rightarrow$ $|\mathbb{L}| = \pm 1$ (jfr. kap. 4)

$|\mathbb{L}| = +1$: proper Lorentztransf.; kan gå kontinuerlig over i identitetstransf. $\mathbb{1}$

$|\mathbb{L}| = -1$: improper Lorentztransf.; fås ved inversjon av romaksene men ikke tidsaksen

Refleksjon av romakser <u>og</u> tidsakse: $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $|\mathbb{L}| = +1$

Skal se at vi må ha $L_{44}^2 \geq 1$:

$$\mathbb{L}\tilde{\mathbb{L}} = \mathbb{1} \Rightarrow L_{\mu\alpha}\tilde{L}_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \Rightarrow L_{\mu\alpha}L_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\nu}$$

$$\Rightarrow L_{4\alpha}L_{4\alpha} = 1 \Rightarrow L_{44}^2 + L_{4j}L_{4j} = 1$$

Da L_{4j} forbinder imaginær koordinat x_4' med reell romkoord. x_j, må vi ha $L_{4j}L_{4j} \leq 0$ (og reell)

$$\Rightarrow L_{44}^2 = 1 - L_{4j}L_{4j} \geq 1 \quad \text{(og reell)}$$

$L_{44} \leq -1$: "ikke-ortokron", involverer tidsinversjon

$L_{44} \geq 1$: ortokron

$\Rightarrow$ Den eneste typen Lorentztransf. som kan gå kontinuerlig over i $\mathbb{1}$ er <u>proper</u> og <u>ortokron</u>, dvs med $|\mathbb{L}| = +1$ og $L_{44} \geq 1$. Kalles gjerne <u>begrenset</u> Lorentztransf. Reduserer seg til Galileitransf. for $v \ll c$.

3. Litt om reell metrikk

[Ikke direkte eksamensstoff, men dukker opp senere, f.eks i feltteori]

Riemannrom: koordinater x_μ (reelle eller komplekse)

$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$ = kvadr. av lengden av veielement i dette rommet

Metrisk tensor: g ; med matriseelementer $g_{\mu\nu}$

Kovariante vektorkomponenter: x_μ
Kontravariante ———"——— : x^μ

Den metriske tensoren g gir sammenhengen mellom x_μ og x^ν :

$$x_\mu = g_{\mu\nu}\, x^\nu \quad , \quad x^\mu = g^{\mu\nu}\, x_\nu \qquad (g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu})$$

For veielementet kan vi da skrive:

$$ds^2 = dx_\mu\, g_{\mu\nu}\, dx_\nu = dx_\mu\, dx^\mu$$

⊃: hvis ds^2 er invariant, er $dx_\mu\, dx^\mu$ invariant

For det komplekse Minkowskirommet hadde vi $x_4 = ict$. Da bruker vi

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

og får $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$, som vi har sett er en invariant. I dette tilfellet blir $x_\mu = x^\mu$, og en har $\mathrm{Tr}\, g = +4$.
[Tr = "Trace" = "Spor" = Σ\{diagonalelementene\}]

La oss se på et par alternativer til det komplekse Minkowskirommet.

A) $x^0 = ct\,,\quad x^1 = x\,,\quad x^2 = y\,,\quad x^3 = z$

For å få $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$ invariant, kan vi velge følgende metrikk:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Da får vi
$$\begin{aligned} dx_0 &= g_{0\nu}\,dx^\nu = g_{00}\,dx^0 = -c\,dt \\ dx_1 &= g_{1\nu}\,dx^\nu = g_{11}\,dx^1 = dx \\ dx_2 &= g_{2\nu}\,dx^\nu = g_{22}\,dx^2 = dy \\ dx_3 &= g_{3\nu}\,dx^\nu = g_{33}\,dx^3 = dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad \text{(invariant!)}$$

Har i dette tilfellet $\mathrm{Tr}\, g = -1+1+1+1 = +2$

B) $x^0 = ct\,,\quad x^1 = x\,,\quad x^2 = y\,,\quad x^3 = z$ (som under A)

Velger nå metrikken $g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

Da får vi
$$\begin{aligned} dx_0 &= +dx^0 = c\,dt \\ dx_1 &= -dx^1 = -dx \\ dx_2 &= -dx^2 = -dy \\ dx_3 &= -dx^3 = -dz \end{aligned}$$

$$\Rightarrow ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad \text{(invariant!)}$$

Her er $\mathrm{Tr}\, g = -2$

Ulike valg brukes ulike steder i litteraturen.