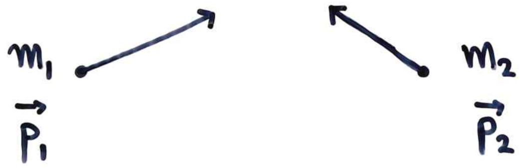
6. Relativistisk kinematikk

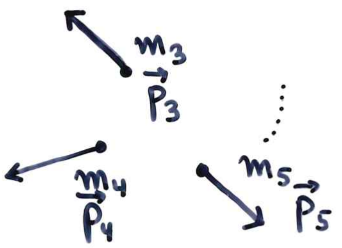
[Spesielt viktig innen høyenergifysikk og partikkelfysikk.]

Skal se på situasjon der 2 partikler kolliderer / vekselvirker og danner nye partikler (muligens flere enn 2).

FØR:



ETTER:



Kjenner altså ikke detaljene i kollisjonen, men vi kan likevel bruke klassisk mekanikk på systemet "tilstrekkelig lang tid" før og etter kollisjonsøyeblikket.

I CM-systemet er total impuls $\vec{P} = 0$ (både før og etter kollisjonen). Bevaring av impuls og energi uttrykkes nå samlet som <u>bevaring av firerimpuls</u>.

FØR: $P_\mu = p_{1\mu} + p_{2\mu}$; $p_\mu = (\vec{p}, iE/c)$

ETTER: $P'_\mu = p_{3\mu} + p_{4\mu} + p_{5\mu} + \ldots\ldots$

Anta at vi er i CM-systemet, og innfør ekvivalent masse $M \equiv E'/c^2$ i dette systemet.

$$\Rightarrow P'_\mu P'_\mu = \underset{\overset{\|}{0}}{\vec{P}'^2} + (iE'/c)^2 = -\left(\frac{E'}{c}\right)^2 = -M^2c^2$$

Da $P_\mu P_\mu$ er invariant, må vi også ha $P_\mu P_\mu = -M^2c^2$ (før "støtet")

$$\Rightarrow P_\mu P_\mu = (p_{1\mu} + p_{2\mu})(p_{1\mu} + p_{2\mu}) = p_{1\mu}p_{1\mu} + p_{2\mu}p_{2\mu} + 2p_{1\mu}p_{2\mu}$$

$$= -m_1^2c^2 - m_2^2c^2 + 2(\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - E_1E_2/c^2)$$

$$= -M^2c^2$$

(har her brukt $p_\mu p_\mu = -m^2c^2$; se s. 133)

$$\Rightarrow M^2c^4 = (E')^2 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2(E_1E_2 - c^2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)$$

Anta at en partikkel i utgangspunktet er i ro i labsystemet, f.eks. $\vec{p}_2 = 0$. Da er $E_2 = m_2c^2$

$$\Rightarrow (E')^2 = M^2c^4 = (m_1^2 + m_2^2)c^4 + 2E_1m_2c^2$$

$$= (m_1+m_2)^2c^4 + 2E_1m_2c^2 - 2m_1m_2c^4$$

$$= (m_1+m_2)^2c^4 + 2m_2c^2\underbrace{(E_1 - m_1c^2)}_{K_1 \,=\, \text{kinetisk energi for partikkel nr 1}}$$

$\Rightarrow$: $(E')^2 = M^2c^4 = (m_1+m_2)^2c^4 + 2m_2c^2 \cdot K_1$

Vi ser at tilgjengelig energi E' i CM-systemet øker langsomt med innkommende kinetisk energi:

For $K_1 \gg m_1c^2, m_2c^2$: $E' \sim \sqrt{K_1}$

Terskelenergi (kjent fra Atom- og Kjernefysikk ?)

Terskelenergien er den minste energien som trengs for å få en reaksjon til å gå. Tilsvarer det tilfellet der alle reaksjonsproduktene er i ro i CM-systemet etter kollisjonen.

Har da at ekvivalent masse blir lik summen av massene til reaksjonsproduktene: $M = \sum_r m_r$

$$\Rightarrow \left(\sum_r m_r\right)^2 c^4 = (m_1+m_2)^2 c^4 + 2m_2c^2 K_1$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{m_1c^2} = \frac{\left(\sum_r m_r\right)^2 - (m_1+m_2)^2}{2m_1m_2}$$

(der vi altså antok at partikkel 2, "target", lå i ro)

Reaksjonens Q-verdi defineres slik:

$$Q = \sum_r m_r - (m_1+m_2) = \text{ny masse i CM-systemet}$$

Får da:

$$\left(\sum_r m_r\right)^2 - (m_1+m_2)^2 = (Q+m_1+m_2)^2 - (m_1+m_2)^2 = Q^2 + 2Q(m_1+m_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{K_1}{m_1c^2} = \frac{Q^2 + 2Q(m_1+m_2)}{2m_1m_2}$$

Eks: Produksjon av antiproton

$$p + N \longrightarrow p + N + p + \bar{p}$$

$$N = \text{nukleon} = n \text{ eller } p$$

$$m_p \approx m_n \approx m_{\bar{p}} \approx 938 \text{ MeV}/c^2 = m$$

$$\Rightarrow Q = 4m - 2m = 2m$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{mc^2} = \frac{(2m)^2 + 4m \cdot 2m}{2m^2} = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = 6mc^2 = 5.57 \text{ GeV}$$

$$\frac{K_1}{c^2} = 6m = 3Q \qquad (\text{med } N \text{ i ro})$$

Hvis vi istedet valgte $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ $\quad$ ($\Rightarrow$ CM-syst. $\hat{=}$ Lab. syst.)

$$K_1 = K_2 = mc^2 = 938 \text{ MeV}$$

(all kin. energi kan gå over i hvileenergi!)

$$\frac{K_1}{c^2} = m = \frac{1}{2}Q$$

Derfor: Hensiktsmessig med en ring der partikler kan akselereres i motsatt retning!