KAP. 9: KANONISKE TRANSFORMASJONER

Knyttet til Hamiltonformuleringen av mekanikken. Så i kap. 8 at det som regel ikke er noen fordel med Hamiltonformalismen (framfor Lagrangeformalismen) når det gjelder å løse konkrete problemer i mekanikken.

Fordeler med Hamiltonformulering av mer fundamental art: bruker koordinater q og impulser p som uavhengige variable på samme nivå. Viktig i både statistisk mekanikk og kvantemekanikk.

——— • ———

Faserommet utspennes av $2n$ akser; n akser for q_i og n akser for p_i.

$$p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i = p_i(q,\dot{q},t), \quad i=1,2,\ldots,n \quad [L=L(q,\dot{q},t)]$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \partial H/\partial p_i \\ \dot{p}_i &= -\partial H/\partial q_i \end{aligned}\right\} \quad i=1,2,\ldots,n \qquad \text{Hamiltons ligninger}$$

Har sett at vi kan foreta "vanlige" koordinattransformasjoner

$$Q_i = Q_i(q,t)$$

f.eks. fra kartesiske koordinater $q=\{x,y\}$ til plane polarkoord. $Q=\{r,\theta\}$. Kalles en punkttransformasjon.

Mer generelt, og i overensstemmelse med Hamiltonformuleringen, kan en transformere både q_i og p_i :

$$(1) \begin{cases} Q_i = Q_i(q,p,t) \\ P_i = P_i(q,p,t) \end{cases}$$): transformasjon av faserommet

slik at Q_i og P_i er kanoniske koordinater som oppfyller ligninger på «Hamiltonform»

$$\dot{Q}_i = \partial K / \partial P_i \quad , \quad \dot{P}_i = -\partial K / \partial Q_i$$

Størrelsen $K(Q,P,t)$ er da Hamiltonfunksjonen i de nye koordinatene, og (1) er en <u>kanonisk transformasjon</u>.

Husker fra kap. 2 at Lagranges ligninger kunne utledes av

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt = 0 \qquad \text{(Hamiltons prinsipp)}$$

Tilsvarende kan Hamiltons ligninger finnes av

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(p,q,t))\,dt = 0 \qquad \text{(modifisert Hamiltons prinsipp)}$$

[Vist i kap. 8-5, ikke pensum. Men husker at $H = p_i \dot{q}_i - L$ fra kap. 8 !]

Dermed må vi også ha

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(P,Q,t))\,dt = 0$$

Sammenligning gir da: $p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}$

der F er en vilkårlig funksjon av <u>vilkårlige variable</u>, slik at $\delta F(t_1) = \delta F(t_2) = 0$, dvs. null variasjon i endepunktene.

Nyttig transformasjon dersom F inneholder halvparten av sine variable fra gammelt koordinatsett og halvparten fra nytt koordinatsett. F kalles da en <u>genererende funksjon</u> og fungerer som ei «bru» mellom (q,p) og (Q,P).

Mulig valg: $F = F_1(q, Q, t)$

Dermed: $$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_1}{dt}$$
$$= P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i$$

Da q_i og Q_i er separat uavhengige, er denne ligningen kun identisk oppfylt dersom

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Alternativt valg: $F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$

Dermed: $$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF_2}{dt} - \dot{Q}_i P_i - Q_i \dot{P}_i$$
$$= -K + \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i - Q_i \dot{P}_i$$

Med q_i og P_i uavhengige fås

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$F_1(q,Q,t)$ og $F_2(q,P,t)$ relatert via Legendretransformasjon:

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \Rightarrow F_1(q,Q,t) = -P_i Q_i + \underbrace{F_2(q,P,t)}_{\text{"integrasjonskonst."}}$$

[P går ut, Q kommer inn; eller omvendt!]

Eks. 1 (Goldstein s. 386)

$$F_2 = q_i P_i$$

Det gir:
$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i$$
$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i$$
$$K = H$$

Funksjonen F_2 genererer altså identitetstransformasjonen!

Noe mer generelt:

$$F_2 = f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) P_i \quad ; \quad f_i \text{ vilkårlig funksjon}$$

Dermed:
$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q,t)$$

De nye koord. avhenger bare av gamle koord. og tida, ikke av gamle impulser. Transf. er av typen

$$Q_i = Q_i(q,t)$$

dvs en punkttransf. Altså er en punkttransf. et spesialtilfelle av kanoniske transf.

Eks. 2: Harmonisk oscillator (Goldstein s. 389-390)

Starter med $H = p^2/2m + \frac{1}{2}kq^2$ i "vanlige" koordinater (én dimensjon!). Med $\omega^2 = k/m$ kan vi skrive

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2\omega^2 q^2\right)$$

Hvis vi kan finne en transformasjon

$$① \quad \begin{aligned} p &= f(P)\cos Q \\ q &= \left(f(P)/m\omega\right)\sin Q \end{aligned}$$

blir $K = H$ syklisk i den nye koordinaten Q:

$$K = H = \frac{f^2(P)}{2m}\left(\cos^2 Q + \sin^2 Q\right) = \frac{f^2(P)}{2m}$$

Må bestemme $f(P)$ slik at transformasjonen blir kanonisk.
Av ①:

$$p = m\omega q \cot Q \quad , \quad \text{uavh. av } f(P)$$

Dette tilsvarer F av typen $F_1(q, Q)$:

$$p = \frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{1}{2} m\omega q^2 \cot Q \quad \left(\text{enkleste løsning}\right)$$

Andre halvpart av transformasjonen:

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$$

Sammenligning med ① gir

$$f(P) = \sqrt{2m\omega P}$$

$$\Rightarrow H = \frac{f^2(P)}{2m} = \omega P$$ i de transf. variable

Da Q er syklisk koordinat, blir konjugert impuls P en konstant. Da $H = E =$ (konst.) total energi, fås

$$P = E/\omega$$

Bevegelsesligm. for Q:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = \omega$$

$$\Rightarrow Q(t) = \omega t + \alpha$$ (α fastlegges fra initialbet. $Q(0)$)

Løsningen for q blir:

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha)$$

$\supset$: vanlig løsning for harmonisk oscillator!