Løsning Eksamen 7. desember 2001

Løsning oppgave 1

a) En lydkilde som når den er i ro i et medium sender ut lyd med frekvens $f_s = \frac{1}{T}$, må når den beveger seg i et medium med hastighet v_s forårsake lyd med bølgelengde λ_m i bevegelsesretningen gitt ved:

$$\lambda_m = (c - v_s) \cdot T = (c - v_s) \cdot \frac{1}{f_s} \tag{1}$$

(For figur, se eventuelt forelesningsnotatene kap. 1.15 s. 65)

Den tilsvarende frekvens f_m som måles av en observatør i ro (i bevegelsesretningen) i mediet blir da:

$$f_m = \frac{c}{\lambda_m} = \frac{c}{c - v_s} \cdot f_s \qquad \text{q.e.d.} \tag{2}$$

b) Frekvensen er person i ro på skinnegangen vil måle blir:

$$f_{\text{ro}} = \frac{c}{c - v_{\text{tog}}} \cdot f = \frac{331}{331 - 25} \cdot 400 \text{ Hz} = \underline{\underline{433 \text{ Hz}}}$$

I oppgaveteksten var det tenkt, men dessverre ikke skrevet at observatøren skulle stå mellom togene. Det blir derfor også betraktet som fullgodt svar om en antar at toget beveger seg fra observatøren. En får da:

$$f_{\text{ro}} = \frac{c}{c + v_{\text{tog}}} \cdot f = \frac{331}{331 + 25} \cdot 400 \text{ Hz} = \underline{\underline{372 \text{ Hz}}}$$

c) Togføreren i det ene toget vil måle følgende frekvens for fløytelyden fra det andre (ifølge lign. (17) i formelsamlingen):

$$f_{\text{tog}} = \frac{1 + v_{\text{tog}}/c}{1 - v_{\text{tog}/c}} \cdot f = \frac{1 + 25.0/331}{1 - 25.0/331} \cdot 400 \text{ Hz} = \underline{\underline{465 \text{ Hz}}}$$

d) Toget som kjører i motvind har hastighet i forhold til luften:

$$v_s = (25.0 + 10.0) \text{ m/s} = 35.0 \text{ m/s}$$

Toget som kjører i medvind har hastighet i forhold til luften:

$$v_m = (25.0 - 10.0) \text{ m/s} = 15.0 \text{ m/s}$$

Togføreren i medvind vil da måle følgende frekvens:

$$f_{\text{med}} = \frac{1 + v_m/c}{1 - v_s/c} \cdot f = \frac{1 + 15.0/331}{1 - 35.0/331} \cdot 400 \text{ Hz} = \underline{\underline{468 \text{ Hz}}}$$

Løsning oppgave 2

a)

$$v_f = \left(\frac{2\pi\gamma}{\lambda(\rho_1 + \rho_2)} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\pi\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} \lambda^{-1/2} = 2.138 \cdot 10^{-2} \, \frac{\text{m}^{3/2}}{s} \cdot \lambda^{-1/2} \tag{3}$$

For $\lambda = 1.00$ mm:

$$v_f = 0.676 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{0.68 \text{ m/s}}}$$

For $\lambda = 0.100$ mm:

$$\underline{\underline{v_f = 2.14 \text{ m/s}}}$$

b)

$$v_f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{2\pi\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} k^{1/2} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} k^{3/2}}} \qquad \text{q.e.d.} \tag{5}$$

c)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{1/2} k^{1/2} \tag{6}$$

Sammenligning mellom (4) og (6) gir:

$$\underline{\underline{v_g = \frac{3}{2} v_f}} \tag{7}$$

d) Vi kaller lengden av bølgetoget for L. Det vil da bruke tiden $t = L/v_g$ på å passere et punkt $x = x_1$. På denne tiden vil:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{\lambda_0/v_f} = \frac{L/v_g}{\lambda_0/v_f} = \frac{L}{\lambda_0}\frac{v_f}{v_g} = \frac{2}{3}\frac{L}{\lambda_0}$$

klare bølgetyper passere $x = x_1$. Definerer vi lengden av bølgetoget til å være $L = 12\lambda_0$, får vi:

$$n = \frac{2}{3}\frac{L}{\lambda} = \underline{\underline{8}}$$

Løsning oppgave 3

a) Totalt felt E_θ i et punkt P er gitt ved:

$$E_\theta = E_1 + E_2 = E_0 \left\{\cos\left[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi\right] + \cos\left[kr - \omega t - \varphi\right]\right\} \tag{8}$$

$$\text{Oppgitt:} \qquad \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2} \tag{9}$$

Defineres $a = k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi$ og $b = kr - \omega t - \varphi$, kan (8) vha. (9) omformes til:

$$E_\theta = 2E_0\cos\left[k\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \varphi\right]\cdot\cos\left(\frac{k\Delta r}{2}\right) \tag{10}$$

Ved figurbetraktning:

$$\Delta r = d\cos\theta \tag{11}$$

(11) inn i (10) gir:

$$E_\theta = 2E_0\cos\left(\frac{kd\cos\theta}{2}\right)\cdot\left[k\left(r + \frac{d\cos\theta}{2}\right) - \omega t - \varphi\right] \quad \text{Q.E.D} \tag{12}$$

b) For et gitt punkt P på observasjonsskjermen, kan totalfeltet E_θ i (12) skrives:

$$E_\theta = E_{\theta_0}\cos(\omega t + \varphi') \tag{13}$$

med amplitude

$$E_{\theta_0} = 2E_0\cos\left(\frac{kd\cos\theta}{2}\right) \tag{14}$$

og

$$\varphi' = k\left(r + \frac{d\cos\theta}{2}\right) - \varphi = \text{ konstant for gitt P} \tag{15}$$

Intensiteten til en harmonisk elektromagnetsik bølge i vakuum med amplitude E_{θ_0} er da (jmf. formelsamling i Bølgefysikk/Fysikk 3):

$$\begin{aligned} I_\theta &= \epsilon c \overline{E_\theta^2} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E_{\theta_0}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\epsilon_0 c \left(2E_0 \cos\left(\tfrac{kd\cos\theta}{2}\right)\right)^2 = \underline{\underline{2\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \tfrac{kd\cos\theta}{2}}} \end{aligned} \tag{16}$$

Vi får maksimal lysintensitet for:

$$\frac{kd\cos\theta}{2} = m\pi \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = m\frac{\lambda}{d} \tag{17}$$

hvor m $= 0, 1, 2\ldots$ begrenset av at $m \leq \frac{d}{\lambda}$.
Den minste positive verdien av λ som gir lysmaksimum svarer til den største positive heltallverdien $m \leq d/\lambda$. Her er:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1000.5\lambda}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad m = 1000$$

som vha. (17) gir vinkelverdien

$$\theta_{\mathrm{m=1000}} = \underline{\underline{\arccos\left(\frac{1000\lambda}{1000.5\lambda}\right) \cong 0.0316 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\mathrm{m=1000}} \cong 1.81^\circ}}$$

Tisvarende finnes lysminima ved at

$$\frac{kd\cos\theta}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{\lambda}{d}\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

hvor $n = 0, 1, 2, \ldots$ begrenset ved $n \leq d/\lambda - 1/2$. Tisvarende ovenfor finnes minste positive verdi av θ som gir lysminimum fra største positive heltallsverdi $n \leq \frac{d}{\lambda} - \frac{2}{2}$ (utenom eventuell verdi av n som gir $\theta = 0$). Her er $\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{1000.5\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2} = 1000$, hvilket betyr at vi har et lysminimum for $\theta = 0$. Den minste positive verdi av θ som gir lysminimum, svarer til $m = 999$, som ved innsetting i (18) gir vinkelverdien:

$$\theta_{n=999} = \arccos\left[\left(999 + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{1000.5\lambda}\right] = \arccos\left(\frac{999.5}{100.5}\right) \cong 0.0447$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\theta_{n=999} \cong 2.56^\circ}}$$

c) Koherenstiden τ_c tilsvarer koherenslengden $l_c \approx 1$ mm er:

$$\tau_c = \frac{l_c}{c} \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ s.}$$

Siden de to kildene er uavhengige, kan de bare gi stabilt interferensmøster på tider av sanne størrelsesorden som τ_c. For tider som er svært mye større enn τ_c, vil derfor all interferens være midlet ut og med det menneskslige øye vil vi derfor på skjermen se et intensitetsfordeling som ikke varierer med θ.

Løsning oppgave 4

Den total ganglengdeforskjellen Δs kan uttrykkes:

$$\Delta s = d \cdot \sin 30^\circ + d \sin\theta = d\left(\frac{1}{2} + \sin\theta\right) \tag{19}$$

hvor første ledd representerer ekstra veglengde tilbakelagt av bølgen som passerer spalt S_2 før den når spalteskjermen. Andre ledd angir hvor mye større ganglengden er fa S_2 til P enn fra S_1 til P. Merk at for negative vinkler θ, blir dette leddet negativt, hvilket betyr at ganglengden fra S_2 til P da blir kortere enn fra S_1 til P.

I punkt P blir resultantbølgefunksjonen:

$$\begin{aligned}\Psi_\theta &= \Psi_1 + \Psi_2 \\ &= \psi\left[e^{i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{i[k(r+\Delta s)-\omega t-\varphi]}\right]\end{aligned}$$

og dermed:

$$\begin{aligned}|\Psi_\theta|^2 &= \Psi_\theta \cdot \Psi_\theta^* \\ &= |\psi_0|^2\left[e^{i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{i[k(r+\Delta s)-\omega t-\varphi]}\right] \cdot \left[e^{-i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{-i[k(r+\Delta s)-\omega t-\varphi]}\right] \\ &= |\psi_0|^2\left[1 + e^{-ik\Delta s} + e^{ik\Delta s} + 1\right] \\ &= |\psi_0|^2 \cdot 2\left[1 + cos(k\Delta s)\right] = 4|\psi_0|^2\cos^2\left(\frac{k\Delta s}{2}\right) \\ &\overset{(19)}{=} \underline{\underline{4|\psi_0|^2\cos^2\left[\frac{1}{2}kd\left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)\right]}}\end{aligned}$$

I følge Maw Borns sannsynlighetsinterpretasjon er $|\Psi_\theta|^2$ sannsynligheten for ett (dvs. hvert) elektrons treffpunkt.