

Løsning Øving 13

Løsning oppgave 1

Vi antar at det flyttbare speilet er plassert slik at vi i sentrum i interferensmønsteret har konstruktiv interferens for lys med bølgelegnde λ_1 og destruktiv for lys med λ_2 . (Da vil interferensringene til lys med λ_1 og lys med λ_2 falle midt mellom hverandre.) Vi kaller ganglengdeforskjellen (dvs. forskjell i lysveg for lys reflektert fra de to speilene) for $2d_1$ og har da:

$$2d_1 = n\lambda_1 \quad (1)$$

og

$$2d_1 = (m + 1/2)\lambda_2 \quad (2)$$

der n og m er heltall.

Den ganglengdeforskjellen der vi på nytt i sentrum får konstruktiv interferens for lys med λ_1 og destruktiv for lys med λ_2 , kaller vi $2d_2$. Vi antar $d_2 > d_1$. Da må forskjellen mellom m og n ha økt med 1, og vi har:

$$2d_2 = (n + r)\lambda_1 \quad (3)$$

og

$$2d_2 = (m + r + 1 + 1/2)\lambda_2 \quad (4)$$

(1) og (3) gir:

$$2(d_2 - d_1) = r\lambda_1 \quad (5)$$

(2) og (4) gir:

$$2(d_2 - d_1) = (r + 1)\lambda_2 \quad (6)$$

Videre gir kombinasjon av (5) og (6):

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2(d_2 - d_1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + 1} \right) = 2 \frac{d_2 - d_1}{r(r + 1)} \quad (7)$$

og også:

$$r(r + 1) = \frac{[2(d_2 - d_1)]^2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (8)$$

(8) i (7) gir:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(d_2 - d_1)} \quad (9)$$

eller:

$$d_2 - d_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \approx \underline{\underline{0.3 \text{ mm}}} \quad (10)$$

Merk at dersom situasjonen er at $\lambda_1 \approx \lambda_2$ er tilnærmet kjent, kan vi ved måling av $d_2 - d_1$ finne $\lambda_1 - \lambda_2$ ved hjelp av lign. (9).

Løsning oppgave 2

$$\Delta t_{\text{jord}} = \frac{4.80 \cdot 10^6 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = 1.60 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Δt_{fly} er egentiden mellom de to passeringene. Altså må vi ifølge lign. (5.15) i forelesningsnotatene ha:

$$\Delta t_{\text{jord}} = \frac{\Delta t_{\text{fly}}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (11)$$

der $u = 300 \text{ m/s}$ og $c = \text{lyshastigheten}$. Altså:

$$\Delta t_{\text{fly}} = \Delta t_{\text{jord}} \sqrt{1 - u^2/c^2} \approx \Delta t_{\text{jord}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) \quad (12)$$

Dermed er relativ tidsdifferanse

$$\frac{\Delta t_{\text{jord}} - \Delta t_{\text{fly}}}{\Delta t_{\text{jord}}} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} = \underline{5.0 \cdot 10^{-13}}$$

og absolutt:

$$\Delta t_{\text{jord}} - \Delta t_{\text{fly}} = 5.0 \cdot 10^{-13} \cdot 1.60 \cdot 10^4 \text{ s} = \underline{\underline{8.0 \cdot 10^{-9} \text{ s}}} \approx \underline{\underline{8.0 \text{ ns}}}$$

Merknad: Det har vært gjort forsøk med å sende nøyaktig klokke med et Boeing 747 fly og denne effekten (dvs. lign. (5.15)) har altså blitt verifisert for hastigheter $u \ll c$. (Moderne klokker kan måle tid med presisjon $10^{-11} \% = \frac{1}{10^{13}}$ i dag.)

Løsning oppgave 3

a) Levetid ifølge observatør på jorda iflg. lign. (5.15) i forelesningsnotatene:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2.20 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - 0.990^2}} = \underline{\underline{15.6 \cdot 10^{-6} \text{ s}}} \quad (13)$$

b) Lengde Δs_j tilbakelagt ifølge observatør på jorda:

$$\Delta s_j = 0.990c \cdot 15.6 \cdot 10^{-6} \text{ s} = \underline{\underline{4630 \text{ m}}}$$

Lengde målt på jorda fra jorda er egenlengden. Vi har da for lengden Δs_m målt fra muonets hvilesystem ved hjelp av lign. (5.25) i forelesningsnotatene:

$$\Delta s_m = \Delta s_j \sqrt{1 - u^2/v^2} = 4630 \text{ m} \sqrt{1 - 0.990^2} = \underline{\underline{653 \text{ m}}}$$

c) En observatør på jorda vil si at muonet eksisterte $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ og forflyttet seg:

$$\Delta s_j = u \cdot \Delta t = 0.990c \cdot 15.6 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 4630 \text{ m}$$

En observatør i hvilesystemet til muonet vil si at muonet eksisterte Δt_0 og at jordas koordinatsystem bevegde seg (parallelt muonets sti (sett fra jorda), men i motsatt retning) på Δt_0 :

$$\Delta s_m = u \Delta t_0 = 0.990c \cdot 2.20 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 653 \text{ m}$$

Verdiene for Δs_j og Δs_m er her i pkt. c) kun basert på at Δt og Δt_0 er forskjellige på grunn av tidsdilatasjon. I pkt. b) fikk vi samme resultat for Δs_m (ut fra Δs_j) kun basert på lengdekontraksjon.

Løsning oppgave 4

Vi kaller lengden muonet tilbakelegger i jordas referansesystem ΔL , hastigheten (i jordas referansesystem) $u_{\min}$ og tida det eksisterer målt fra jorda Δt og egentiden det eksisterer Δt_0 . Vi har da:

$$S = u_{\min} \cdot \Delta t = u_{\min} \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (u_{\min}/c)^2}} \quad (14)$$

som gir

$$\left(1 - \frac{u_{\min}^2}{c^2}\right) \cdot S^2 = (u_{\min} \cdot \Delta t_0)^2$$

og

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &= \left(\frac{S^2}{\frac{S^2}{c^2} + (\Delta t_0)^2} \right)^{1/2} = c \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\Delta t_0 c}{S} \right)^2 \right)^{1/2}} \\
 &\approx c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t_0 c}{S} \right)^2 \right) \\
 &= c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2.20 \cdot 10^{-6} \cdot 2.997925 \cdot 10^8}{1.00 \cdot 10^4} \right)^2 \right) \\
 &\approx \underline{\underline{0.997825 \text{ c} \approx 2.9914 \cdot 10^8 \text{ m/s}}} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Vi kaller lengden fra jordas overflate til dannelsespunktet for muonet i jordas referansesystem for L_0 . Tilsvarende lengde i muonets referansesystem kalles L . Vi har da:

$$\begin{aligned}
 L &= L_0 (1 - (u_{\min}/c)^2)^{1/2} \\
 &= 1.00 \cdot 10^4 \text{ m} (1 - (0.997825)^2)^{1/2} \\
 &\approx \underline{\underline{6.59 \cdot 10^2 \text{ m}}} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Løsning oppgave 5

For linjer med bølgelengde i intervallet $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, må n_1 og n_2 oppfylle følgende kriterium:

$$\frac{1}{R_H \lambda_{\max}} \leq \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \leq \frac{1}{R_H \lambda_{\min}}$$

Med oppgitte verdier $\lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$, $\lambda_{\max} = 750 \text{ nm}$ og $R_H = 1.0972 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$, blir kriteriet

$$0.122 \leq \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \leq 0.228 \quad (17)$$

Da n_2 kan ta verdiene $n_2 = 2, 3, 4, \dots$, vil $(1/n_2^2)$ alltid være større enn 0 og mindre enn 0.25. Innsetting av $n_1 = 1$ i (17) viser at den høyre ulikheten aldri lar seg oppfylle, uansett verdi av n_2 , dvs. linjen svarende til $n_1 = 1$ ligger i sin helhet i det ultrafiolette område av spekteret. Ved inndetting av $n_1 = 2$ ser vi derimot at det nå må finnes noen verdier av n_2 som tilfredsstiller begge ulikhetene i (17), dvs. serien svarende til $n_2 = 2$ ligger delvis i det synlige området. For $n_1 \geq 3$ vil aldri den venstre ulikheten kunne oppfylles, uansett verdi av n_2 , dvs. seriene svarende til $n_2 \geq 3$ ligger i sin helhet i det infrarøde område.

For $n_1 = 2$ kan n_2 ta verdiene $n_2 = 3, 4, 5, \dots$ ($n_2 > n_1$). Innsetting i (17) viser at begge ulikhetene er oppfylt for $n_2 = 3, 4, 5, 6$, dvs. hydrogenspekteret inneholder fire

synlige linjer:

$$n_1 = 2, n_2 = 3 \rightarrow \text{rød linje med bølgelengde } 656.2 \text{ nm.}$$

$$n_1 = 2, n_2 = 4 \rightarrow \text{turkis linje med bølgelengde } 486.1 \text{ nm.}$$

$$n_1 = 2, n_2 = 5 \rightarrow \text{fiolett linje med bølgelengde } 434.0 \text{ nm.}$$

$$n_1 = 2, n_2 = 6 \rightarrow \text{nær-ultrafiolett linje med bølgelengde } 410.1 \text{ nm.}$$

Løsning oppgave 6

a) Wiens lov gir:

$$\nu_{max} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K} \cdot 3200 \text{ K} = 1.88 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

og fotonenergien er følgende:

$$\nu_{max} = 6.626008 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 1.88 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 1.25 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{Antall utsendte fotoner pr. sek er da: } \frac{40 \text{ W}}{1.25 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \underline{\underline{3.2 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}}}$$

Ved avstand 2.0 m fra lyspæren fordeler fotonfluksen seg over et kuleskall med areal $4\pi(2.0 \text{ m})^2 = 16\pi \text{ m}^2$. Antall fotoner pr. m^2 er derfor:

$$\frac{3.2 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}}{16\pi \text{ m}^2} = \underline{\underline{6.4 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}}$$

og antallet fotoner som passerer pupillen (med åpning $\pi(0.25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2$) er:

$$6.4 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot \pi(0.25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = \underline{\underline{1.3 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}}}$$

b) Energien til et foton med bølgelengde 550 nm er:

$$\begin{aligned} h\nu = hc/\lambda &= \frac{6.62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{550 \cdot 10^9 \text{ m}} \\ &= \underline{\underline{3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \end{aligned}$$

og antallet fotoner som treffer jordoverflaten pr. m^2 pr. sekund er:

$$\frac{1.0 \cdot 10^3 \text{ W m}^{-2}}{3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \underline{\underline{2.8 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}}$$

Antall fotoner som treffer innenfor en sirkel med diameter 5 mm er:

$$2.8 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot \pi(0.25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = \underline{\underline{5.5 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}}}$$

c) Energi pr. fotoen er:

$$h\nu = hc/\lambda = \frac{6.62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{600 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \underline{3.31 \cdot 10^{-19} \text{ J}}$$

og dersom lyset avgir effekten $P = 1.7 \cdot 10^{-18} \text{ W}$ til netthinnen, tilsvarer dette en fotonstrøm:

$$\frac{1.7 \cdot 10^{-18} \text{ W}}{3.31 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 5.1 \text{ s}^{-1} \approx \underline{\underline{5 \text{ s}^{-1}}}$$

Kommentar: Resultatene i pkt b) og c) viser hvor bemerkelsesverdig stort øyets følsomhetsområde er. Med en nedre følsomhetsgrense på ca. 5 fotoner pr. sekund til en øvre grense på ca. $5 \cdot 10^{16}$ fotoner pr. sekund spenner øyets dynamiske område over 16 dekaner. (Det antas at det er mulig å se mot solen i ca. 1 sekund uten at øye skades.) Hvor imponerende dette er, blir klart ved å sammenligne med et fotomultiplikatorrør (PM-rør), som er en av de mest følsomme optiske detektorer mennesket har fremstilt. Under optimale forhold - som innebærer nedkjøling av fotokatoden og digitalisering av utgangssignalet - kan et slikt PM-rør telle ned mot 1 foton pr. sekund (og kanskje enda lavere). Imidlertid, PM-røret vil “gå i metning” ved $10^7 - 10^8$ fotoner pr. sekund, altså lenge før øyet “går i metning”.