# Løsning Øving 14

## Løsning oppgave 1

Vi har fra lign. (5.49) i forelesningene:

$$E_k = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ma}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} dx \tag{1}$$

der $x_1$ og $x_2$ er punkter der partikkelen har henholdsvis hastighet 0 og $v_1$. (Vi har i (1) erstattet $v$ med $v_x$.)
Vi nytter så

$$a\,dx = \frac{dv_x}{dt}dx = \frac{dx}{dt}dv_x = v_x\,dv_x \tag{2}$$

som innsatt i (1) gir:

$$E_k = \int_0^v \frac{mv_x}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} dv_x. \tag{3}$$

Vi substituerer:

$$y = 1 - v_x^2/c^2 \tag{4}$$

som gir:

$$dy = -\frac{2v_x}{c^2}dv_x \tag{5}$$

og innsatt i (3):

$$\begin{aligned} E_k &= -\int_1^{1-v^2/c^2} \frac{mc^2}{2} y^{-3/2} dy = \frac{mc^2}{2}\int_{1-v^2/c^2}^1 y^{-3/2} dy = \frac{mc^2}{2}\left[-2y^{-1/2}\right]_{1-v^2/c^2}^1 \\ &= mc^2\left((1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2}} \end{aligned} \tag{6}$$

som er lign. (5.48) i forelesningene. q.e.d.

## Løsning oppgave 2

Først bestemmer vi relativ fart $u_1$ og $u_2$ for galaksene sett fra jorda, ved hjelp av Doppler-effekten:

$$f = \frac{c}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{c}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{f_0}{f}$$

eller

$$\frac{f}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \left(\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1 - x_1}{1 + x_1}\right) = \left(\frac{486}{571}\right)^2 = 0.724; \quad x_1 = \frac{u_1}{c} = \frac{0.276}{1.724}$$

$$\underline{\underline{u_1}} = \underline{\underline{0.16c}}$$
$$\underline{\underline{u_2}} = \frac{0.432}{1.586} = \underline{\underline{0.276c}}$$

Begge går i samme retning (fra oss).

Relativ fart:

$$\underline{\underline{u'_x}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{0.276 - 0.160}{1 - 0.276 \cdot 0.160} = \underline{\underline{0.121c}}.$$

De vil fjerne seg fra hverandre med relativ fart $0.121c$.

$$\lambda'_{1,2} = \frac{\lambda_0}{\left(\frac{1-\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}}\right)^{1/2}} = \frac{486}{\sqrt{\frac{0.879}{1.121}}} = \frac{486}{0.8855}\text{nm} = \underline{\underline{548.8 \text{ nm}}}$$

$\lambda'_1 = \lambda'_2$ fordi det er <u>relativ</u> fart som avgjør.

**<u>Løsning oppgave 3</u>**

a) Fra de-Broglie-relasjonen følger at:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{0.058 \text{ kg} \cdot 25 \text{ m/s}} = \underline{\underline{4.6 \cdot 10^{-34} \text{ m}}}$$

<u>Kommentar:</u> Denne bølgelengden er mye <u>mindre</u> enn tennisballens størrelse (mye mindre enn det meste, faktisk). Det er derfor ikke nødvendig å ta hensyn til tennisballens bølgenatur for å predikere dens bevegelse.

b) Regner vi ikke-relativistisk finner vi på samme måte som i pkt. a:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{[2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 40 \cdot 10^3 (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}]^{1/2}} = \underline{\underline{0.061 \text{ Å}}}$$

<u>Kontroll:</u> Dersom vi estimerer elektronenes hastighet ved $v = \frac{p}{m_e} = \sqrt{\frac{2E}{m_e}}$, finner vi at $v \approx 1.2 \cdot 10^8$ m/s, altså ca. 40 % av lyshastigheten. Vi vil derfor som en kontroll beregne $\lambda$ relativistisk. Fra forelesningene har vi følgende uttrykk for den totale energien $E$:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{7}$$

Den kinetiske energien er gitt ved:

$$E_k = E - mc^2. \tag{8}$$

Løses (7) og (8) mhp. $p$ finner vi

$$p = \left[\left(\frac{E_k}{c}\right)^2 + 2E_k m\right]^{1/2}$$

De-Broglie-bølgelengden beregnet relativistisk blir derfor:

$$\lambda = \frac{h}{\left[\left(\frac{E_k}{c}\right)^2 + 2m_e E_k\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\left[\left(\frac{40 \cdot 10^3 (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J})}{3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}\right)^2 + 2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 40 \cdot 10^3 (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J})\right]^{1/2}} = \underline{0.060 \text{ Å}}$$

Feilen vi gjør ved å regne ikke-relativistisk er derfor ganske liten ($< 2$ %) selv om elektronhastigheten er så stor som 40 % av lyshastigheten.

Kommentar: Elektronets de-Broglie-bølgelengde er mye større enn elektronets utstrekning ($< 10^{-18}$ m). Elektronet kan derfor bevege seg gjennom fysiske strukturer av samme størrelsesorden som de-Broglie-bølgelengden, og det vil i det tilfelle være nødvendig å ta hensyn til elektronets bølgenatur for å predikere dets bevegelse.

I prinsipp skulle et elektronmikroskop med 40 keV elektroner kunne probe strukturen av samme størrelsesorden som den tilhørende de-Broglie-bølgelengden, dvs. $\sim 0.06$ Å. I praksis kan ikke et elektromikroskop gi så god oppløsning som dette pga. instrumentelle begrensninger (hovedsakelig pga. linsefeil i de elektromagnetiske linsene som brukes i et slikt instrument). Et moderne forsknings-elektronmikroskop kan gi oppløsning ned mot 1 Å i såkalt TEM-mode (TEM = transmisjons-elektronmikroskopi).

c) Vi beregner de-Broglie-bølgelengden for elektronene og $\alpha$-partiklene. I pkt. b fant vi at $\lambda$ kan beregnes ikke-relativistisk for elektroner med så høy energi som 40 keV. Vi kan derfor trygt bruke ikke-relativistisk beregning for 100 eV elektroner, dvs.

$$\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{[2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 100 (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J})]^{1/2}} = \underline{1.2 \text{ Å}}$$

For å finne $\alpha$-partiklenes de-Broglie-bølgelengde bør det først undersøkes om deres hastighet er så lav at en kan regne ikke-relativistisk. Fra det ikke-relativistiske uttrykket $v_\alpha = p/m_\alpha = \sqrt{2E_k/m_\alpha}$ estimerer vi at $v_\alpha \sim 1.9 \cdot 10^7$ m/s, dvs. bare $\sim 6\,\%$ av lyshastigheten. Det skulle derfor for vårt formål være OK å regne ikke-relativistisk:

$$\lambda_\alpha = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_\alpha E_k}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{[2 \cdot 6.6 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 7.7 \cdot 10^6 (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J})]^{1/2}} = \underline{\underline{5.2 \cdot 10^{-5} \text{ Å}}}$$

Benyttes oppgitt formel for Bragg-refleksjon med gitterkonstant $d = 1$ Å (en typisk størrelse for faste stoffer) finner vi følgende begrensning på antall maksima $n$ i vinkelen $\theta$ sitt variasjonsområde $(0°, 90°)$:

For 100 eV elektroner:

$$n < 2d \cdot \frac{\sin 90^\circ}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \cdot \frac{1}{1.2 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} \sim 1.7$$

dvs. når $\theta$ varieres i området $0^\circ - 90^\circ$ gjennomløpes kun ett maksimum svarende til $n = 1$. Denne variasjon av reflektert intensitet er lett observerbar eksperimentelt.

For 7.7 MeV-$\alpha$-partikler:

$$n < 2d \cdot \frac{\sin 90^\circ}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \cdot \frac{1}{5.2 \cdot 10^{-15}\ \text{m}} \sim 3.8 \cdot 10^4$$

dvs. når $\theta$ varieres i området $0^\circ - 90^\circ$ gjennomløper den reflekterte intensiteten et svært stort antall maksima (og minima). Disse vil ligge så tett (f.eks. er vinkelavstanden mellom maksima svarende til $n = 1$ og $n = 2$ lik $\sim 0.0015^\circ$) at interferenseffekten i dette tilfelle blir veldig vanskelig å påvise eksperimentelt.

d) Da de-Broglie-bølgelengden er gitt ved $\lambda = h/p = h/mv$ (ikke-relativistisk) finner vi middelbølgelengden:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{h}{m_n} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \qquad \left( \text{merk at } \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \neq \frac{1}{< v >} \right)$$

Med Maxwells hastighetsfordeling får vi:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle &= \int_0^\infty \frac{1}{v} p(v)\, dv = \left( \frac{m_n}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty v e^{-m_n v^2/2k_B T} dv \\
&= \left( \frac{m_n}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi \left( \frac{k_B T}{m_n} \right) \int_0^\infty e^{-m_n v^2/2k_B T} \left( \frac{m_n v}{k_B T} \right) dv \\
&= \left( \frac{m_n}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi \left( \frac{k_B T}{m_n} \right) \int_0^\infty e^{-m_n v^2/2k_B T} d\left( \frac{m_n v^2}{2k_B T} \right) \\
&= \left( \frac{m_n}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi \left( \frac{k_B T}{m_n} \right) \left[ -e^{-m_n v^2/2k_B T} \right]_0^\infty \\
&= \left( \frac{m_n}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} 4\pi \left( \frac{k_B T}{m_n} \right) \cdot 1 = \underline{\left( \frac{2m_n}{\pi k_B T} \right)^{1/2}}
\end{aligned}$$

Middelbølgelengden blir følgelig:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{h}{m_n} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = h \left( \frac{2}{\pi m_n k_B T} \right)^{1/2}$$

Innsetting av tallverdiene $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/kg, $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ Js, $T = 373$ K gir:

$$\langle \lambda \rangle = 1.80 \cdot 10^{-10}\ \text{m} = \underline{1.80\ \text{Å}}$$

Denne bølgelengden er av samme størrelsesorden som gitterkonstanten i faste stoffer, og spredning av nøytroner skulle derfor være en velegnet teknikk for strukturundersøkelser av faste stoffer.

**Løsning oppgave 4**

$$\Psi_0 = \Psi_1 + \Psi_2 \tag{9}$$

$$\Psi_1 = \psi_{10} e^{i[kr-\omega t-\varphi]} \tag{10}$$

$$\Psi_2 = \psi_{20} e^{i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]} \tag{11}$$

Merk at $\psi_{10}$ og $\psi_{20}$ er avhengige av hhv. $r$ og $r+\Delta r$. Men vi betrakter små $\theta$, $d \ll L$ og konstant $L$ slik at vi på observasjonsskjermen har med god tilnærmelse:

$$\psi_{10} \approx \psi_{20} \approx \text{konstant} \equiv \psi_0 \tag{12}$$

Vi får da:

$$\Psi_\theta = \Psi_1 + \Psi_2 = \psi_0 \left[ e^{i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]} \right] \tag{13}$$

Merknad: Om vi erstatter $\psi_0$ med $E_0$, er lign. (13) ovenfor det samme uttrykket vi hadde for $E_\theta$ i oppgave 3 i øving 12 innenfor Re{ }. Merk at i oppgave 3 i øving 12 brukte vi kompleks regning til å legge sammen reelle elektriske felter. Vi kunne like godt ha regnet reelt som vi gjorde i forelesningene kap. 4.4.2. Her har vi ingen reell erstatning for $\Psi_\theta$ gitt i lign. (13).

a)

$$\begin{aligned}
|\Psi_\theta|^2 &= \Psi_\theta \cdot \Psi_\theta^* \\
&= |\psi_0|^2 \left[ e^{i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]} \right] \cdot \left[ e^{-i[kr-\omega t-\varphi]} + e^{-i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]} \right] \\
&= |\psi_0|^2 \left[ 1 + e^{-ik\Delta r} + e^{ik\Delta r} + 1 \right] \\
&= 2|\psi_0|^2 \left[ 1 + \cos(k\Delta r) \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

Ved figurbetraktning:

$$\Delta r = d \sin\theta \tag{15}$$

Dermed:

$$k\Delta r = kd \sin\theta \equiv \delta \tag{16}$$

Med (16) innsatt i (14) får vi da:

$$|\Psi_\theta|^2 = 2|\psi_0|^2 \left[ 1 + \cos\delta \right] = 2|\psi_0|^2 \left[ 1 + 2\cos^2\frac{\delta}{2} - 1 \right] = \underline{\underline{4|\psi_0|^2 \cos^2\frac{\delta}{2}}} \tag{17}$$

b) Lign. (17) gir:

$$\frac{|\Psi_\theta|^2}{|\Psi_{\theta=0}|^2} = \underline{\underline{\cos^2\frac{\delta}{2}}} \tag{18}$$

som er det samme vi fikk for $I_\theta/I_0$ i forelesningene lign. (4.29) i kap. 4.4.

c) $|\Psi_\theta|^2$ har nabomaksima f.eks. for

$$\frac{\delta}{2} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\delta}{2} = \pi \tag{19}$$

dvs. for:

$$\frac{1}{2}kd\sin\theta = 0 \quad \text{og} \quad \frac{1}{2}kd\sin\theta = \pi \tag{20}$$

$\sin\theta \ll 1$ og vi setter:

$$\sin\theta \approx \frac{y}{L} \tag{21}$$

Fra lign. (20) får vi da at vi har nabomaksima for:

$$y = 0 \quad \text{og} \quad y = \frac{2\pi L}{kd} \tag{22}$$

Avstanden $a$ mellom to nabomaksima er altså:

$$a = \frac{2\pi L}{kd} = \frac{2\pi L}{\frac{2\pi}{\lambda}d} = \frac{\lambda L}{d} \tag{23}$$

Med $p = 1.0 \cdot 10^{-22}$ kg m/s får vi:

$$\lambda = \frac{h}{p} = 6.6 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 6.6 \text{ pm}$$

Videre oppgitt:

$$d = 2.0\ \mu\text{m} \quad og \quad L = 2.0 \text{ m}$$

som gir innsatt i (23):

$$a = \frac{\lambda L}{d} = \frac{6.6 \cdot 10^{-12} \cdot 2.0}{2.0 \cdot 10^{-6}} \text{ m } \approx 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = \underline{\underline{6.6\ \mu\text{m}}} \tag{24}$$

Merk at tallene vi her har regnet med er av aktuell størrelsesorden for elektroninterferenseksperimenter gjort med elektronmikroskop. Men interferensmønsteret blir vesentlig forstørret før det registreres på en film eller en fluoreserende skjerm.