Løsning Øving 6

Vi har fra lign. (1.104) i forelesningene:

$$f_m = \frac{1 - v_m/c}{1 - v_s/c} f_s \tag{1}$$

der f_m og f_s er respektivt målt og utsendt frekvens. v_m og v_s er henholdsvis hastighet til observatør og kilde regnet algebraisk.

Løsning oppgave 1

$$f_{\text{hørt av 1}} = \frac{1 + v_1/c}{1 - v_2/c} f_s = \frac{1 + \frac{60.0}{3.6}/331}{1 - \frac{90.0}{3.6}/331} \cdot 524 \text{ Hz} = \underline{\underline{595 \text{ Hz}}}$$

$$f_{\text{hørt av 2}} = \frac{1 + v_2/c}{1 - v_1/c} f_s = \frac{1 + \frac{90.0}{3.6}/331}{1 - \frac{60.0}{3.6}/331} \cdot 524 \text{ Hz} = \underline{\underline{593 \text{ Hz}}}$$

Løsning oppgave 2

Lyden reflekteres med samme hastighet og frekvens som innkommende bølge. Altså har vi:

$$f_{\text{ekko}} = \frac{1 + \frac{75}{3.6}/331}{1 - \frac{75}{3.6}/331} \cdot 420 \text{ Hz} = \underline{\underline{476 \text{ Hz}}}$$

Løsning oppgave 3

Hastigheten til toget i forhold til mediet (luften) er:

$$v_s = (30 - 20) \text{ m/s} = \underline{10 \text{ m/s}}.$$

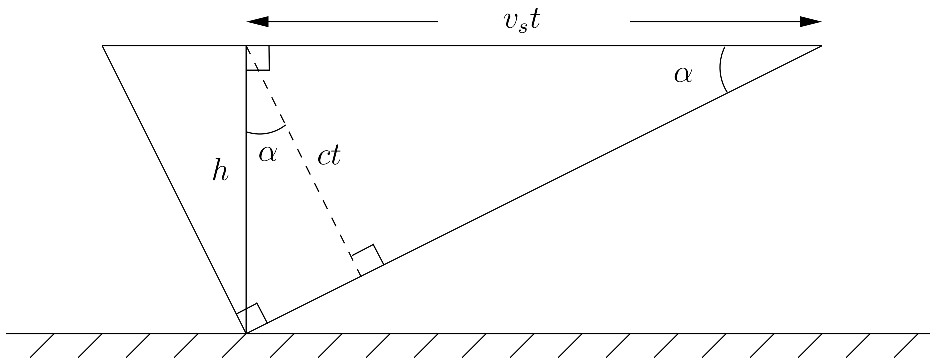
Hastigheten til perrongen i forhold til luften er:

$$v_m = (0 - 20) \text{ m/s} = \underline{-20 \text{ m/s}}.$$

Altså har vi:

$$f_{\text{perrong}} = \frac{1 + 20/331}{1 - 10/331} \cdot 440 \text{ Hz} = \underline{\underline{481 \text{ Hz}}}$$

Løsning oppgave 4



Ved figurbetrakning:

$$\sin\alpha = \frac{ct}{v_s t} = \frac{c}{v_s}$$
$$\cos\alpha = \frac{ct}{h}$$

som gir

$$\left(\frac{c}{v_s}\right)^2 + \left(\frac{ct}{h}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

$$v_s/c = \left(\frac{1}{1-\left(\frac{ct}{h}\right)^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{1-\left(\frac{331\cdot 30.4}{12000}\right)^2}\right)^{1/2} = 1.835 \tag{3}$$

som gir:

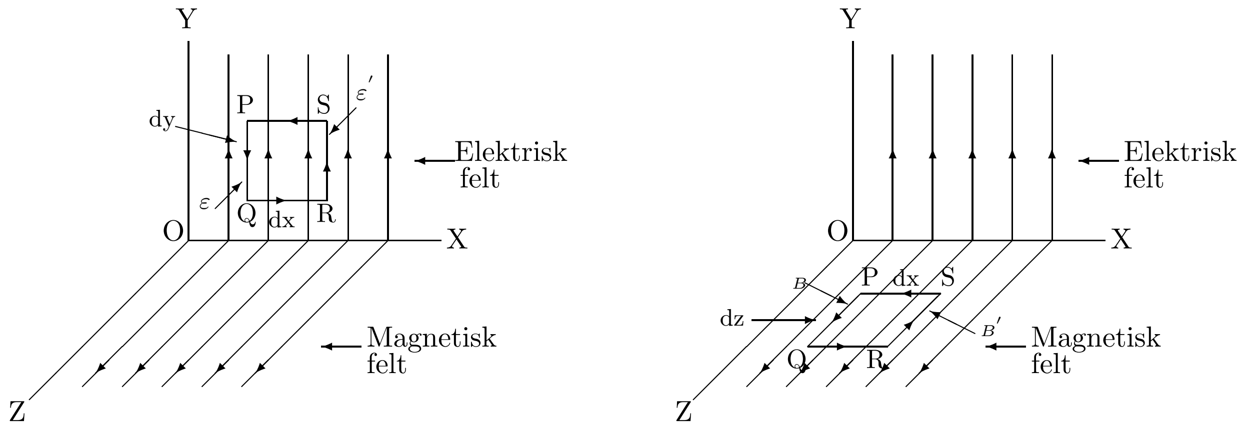
$$v_s = 331\cdot 1.835 \text{ m/s} = 607 \text{ m/s} = \underline{\underline{2190 \text{ km/t}}}$$

$$\sin\alpha = \frac{c}{v_s} = \frac{331}{607} = 0.545$$
$$\alpha = \underline{\underline{33.0^\circ}}$$

Løsning oppgave 5

Vi nytter A&F fig. 29.5 som er vist på neste side. Imidlertid kaller vi x-posisjonen til PQ for x_0 og til SR for $x_0 + \Delta x$. Tilsvarende kaller vi posisjonene til QR og PS i henholdsvis xy-planet og xz-planet for y_0 og $y_0 + \Delta y$ og for z_0 og $z_0 + \Delta z$. Vi nytter først A&F lign. (27.2) på rektangelet PQRS i xy-planet.

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{L} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{B}\cdot d\vec{S} \tag{4}$$



Figur 1: Anvendelse av Maxwells ligninger på rektangelet $PQRS$ gir bølgefunksjonen for det elektromagnetiske felt. Bølgen propagerer i positiv x-retning.

der L omringer arelaet A.
Vi integrerer i pilenes retning og får da:

$$\begin{aligned}\oint_{\text{PQRS}} \vec{E} \cdot d\vec{L} &= -E(x,t) \cdot \Delta y + 0 + E(x+\Delta x,t) \cdot \Delta y + 0 \\ &= [E(x+\Delta x,t) - E(x,t)] \cdot \Delta y \end{aligned} \tag{5}$$

siden $\vec{E} \perp$ QR og PS.
Når vi lar $\Delta x \to 0$ og $\Delta y \to 0$ får vi:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \oint_{\text{PQRS}} \vec{E} \cdot d\vec{L} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{[E(x+\Delta x,t) - E(x,t)]}{\Delta x} \Delta x \Delta y = \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} dxdy \tag{6}$$

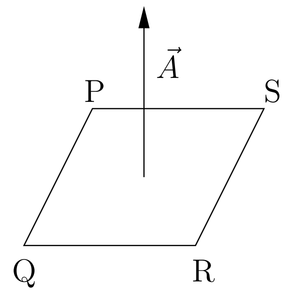
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \int_{\text{A=PQRS}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(x,t)\, dxdy \tag{7}$$

siden $\vec{B} \perp \vec{A}$ der $\vec{A}$ er gitt på figuren nedenfor.
(7) og (6) i (4) gir:

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} dxdy = -\frac{\partial}{\partial t}[B(x,t)dxdy] = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} dxdy$$

og

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} \tag{8}$$



Vi nytter så A&F lign. (27.14) (med strømmen lik 0 siden vi har vakuum) på rektangelet PQRS i xz-planet.

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{L} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\int_A \vec{E}\cdot d\vec{S} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\oint_{\text{PQRS}} \vec{B}\cdot d\vec{L} &= B(x,t)\Delta z + 0 - B(x+\Delta x,t)\Delta z + 0 \\ &= -[B(x+\Delta x,t) - B(x,t)]\Delta z \end{aligned}\tag{10}$$

siden $\vec{B} \perp$ QR og PS.
Når vi lar $\Delta x \to 0$ og $\Delta z \to 0$:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z\to 0}} \oint_{\text{PQRS}} \vec{B}\cdot d\vec{L} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z\to 0}} -\frac{[B(x+\Delta x,t) - B(x,t)]}{\Delta x}\Delta x\Delta z = -\frac{\partial B(x,t)}{\partial x}dxdz \tag{11}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta z\to 0}} \int_{\text{PQRS}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(x,t)dxdz \tag{12}$$

(11) og (12) i (9) gir:

$$-\frac{\partial B(x,t)}{\partial x}dxdz = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}[E(x,t)dxdz] = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}dxdz$$

og

$$-\frac{\partial B(x,t)}{\partial x} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} \tag{13}$$

Merk at lign. (8) og (13) kopler elektrisk og magnetisk felt. Lign. (8) gir at dersom B varierer i tid, så må E variere i x-retning. Lign. (13) gir at dersom E varierer i tid, så må B variere i x-retning.

For å finne bølgeligningen for E partiellderiverer vi (8) m.h.p. x og (13) m.h.p. t:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x \partial t} \tag{14}$$

$$-\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} \tag{15}$$

Sammenligning av (14) og (15) gir:

$$\underline{\underline{\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2}}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = \underline{\underline{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2}}} \quad \text{q.e.d.} \tag{16}$$

For å finne bølgeligningen for B partiellderiverer vi (8) m.h.p. t og (13) m.h.p. x:

$$\frac{\partial^2 E(E,t)}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} \tag{17}$$

$$-\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t \partial x} \tag{18}$$

Sammenligning av (17) og (18) gir:

$$\underline{\underline{\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2}}} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} = \underline{\underline{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2}}} \quad \text{q.e.d.} \tag{19}$$