

Løsning Øving 13

Løsning oppgave 1

Vi antar at det flyttbare speilet er plassert slik at vi i sentrum i interferensmønsteret har konstruktiv interferens for lys med bølgelegnde λ_1 og destruktiv for lys med λ_2 . (Da vil interferensringene til lys med λ_1 og lys med λ_2 falle midt mellom hverandre.) Vi kaller ganglengdeforskjellen (dvs. forskjell i lysveg for lys reflektert fra de to speilene) for $2d_1$ og har da:

$$2d_1 = n\lambda_1 \quad (1)$$

og

$$2d_1 = (m + 1/2)\lambda_2 \quad (2)$$

der n og m er heltall.

Den ganglengdeforskjellen der vi på nytt i sentrum får konstruktiv interferens for lys med λ_1 og destruktiv for lys med λ_2 , kaller vi $2d_2$. Vi antar $d_2 > d_1$. Da må forskjellen mellom m og n ha økt med 1, og vi har:

$$2d_2 = (n + r)\lambda_1 \quad (3)$$

og

$$2d_2 = (m + r + 1 + 1/2)\lambda_2 \quad (4)$$

(1) og (3) gir:

$$2(d_2 - d_1) = r\lambda_1 \quad (5)$$

(2) og (4) gir:

$$2(d_2 - d_1) = (r + 1)\lambda_2 \quad (6)$$

Videre gir kombinasjon av (5) og (6):

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2(d_2 - d_1) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r + 1} \right) = 2 \frac{d_2 - d_1}{r(r + 1)} \quad (7)$$

og også:

$$r(r + 1) = \frac{[2(d_2 - d_1)]^2}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (8)$$

(8) i (7) gir:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(d_2 - d_1)} \quad (9)$$

eller:

$$d_2 - d_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \approx \underline{\underline{0.3 \text{ mm}}} \quad (10)$$

Merk at dersom situasjonen er at $\lambda_1 \approx \lambda_2$ er tilnærmet kjent, kan vi ved måling av $d_2 - d_1$ finne $\lambda_1 - \lambda_2$ ved hjelp av lign. (9).

Løsning oppgave 2

$$\Delta t_{\text{jord}} = \frac{4.80 \cdot 10^6 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = 1.60 \cdot 10^4 \text{ s}$$

Δt_{fly} er egentiden mellom de to passeringene. Altså må vi ifølge lign. (5.15) i forelesningsnotatene ha:

$$\Delta t_{\text{jord}} = \frac{\Delta t_{\text{fly}}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (11)$$

der $u = 300 \text{ m/s}$ og $c = \text{lyshastigheten}$. Altså:

$$\Delta t_{\text{fly}} = \Delta t_{\text{jord}} \sqrt{1 - u^2/c^2} \approx \Delta t_{\text{jord}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) \quad (12)$$

Dermed er relativ tidsdifferanse

$$\frac{\Delta t_{\text{jord}} - \Delta t_{\text{fly}}}{\Delta t_{\text{jord}}} = \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} = \underline{5.0 \cdot 10^{-13}}$$

og absolutt:

$$\Delta t_{\text{jord}} - \Delta t_{\text{fly}} = 5.0 \cdot 10^{-13} \cdot 1.60 \cdot 10^4 \text{ s} = \underline{\underline{8.0 \cdot 10^{-9} \text{ s}}} \approx \underline{\underline{8.0 \text{ ns}}}$$

Merknad: Det har vært gjort forsøk med å sende nøyaktig klokke med et Boeing 747 fly og denne effekten (dvs. lign. (5.15)) har altså blitt verifisert for hastigheter $u \ll c$. (Moderne klokker kan måle tid med presisjon $10^{-11} \% = \frac{1}{10^{13}}$ i dag.)

Løsning oppgave 3

a) Levetid ifølge observatør på jorda iflg. lign. (5.15) i forelesningsnotatene:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2.20 \cdot 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - 0.990^2}} = \underline{\underline{15.6 \cdot 10^{-6} \text{ s}}} \quad (13)$$

b) Lengde Δs_j tilbakelagt ifølge observatør på jorda:

$$\Delta s_j = 0.990c \cdot 15.6 \cdot 10^{-6} \text{ s} = \underline{\underline{4630 \text{ m}}}$$

Lengde målt på jorda fra jorda er egenlengden. Vi har da for lengden Δs_m målt fra muonets hvilesystem ved hjelp av lign. (5.25) i forelesningsnotatene:

$$\Delta s_m = \Delta s_j \sqrt{1 - u^2/v^2} = 4630 \text{ m} \sqrt{1 - 0.990^2} = \underline{\underline{653 \text{ m}}}$$

c) En observatør på jorda vil si at muonet eksisterte $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ og forflyttet seg:

$$\Delta s_j = u \cdot \Delta t = 0.990c \cdot 15.6 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 4630 \text{ m}$$

En observatør i hvilesystemet til muonet vil si at muonet eksisterte Δt_0 og at jordas koordinatsystem bevegde seg (parallelt muonets sti (sett fra jorda), men i motsatt retning) på Δt_0 :

$$\Delta s_m = u \Delta t_0 = 0.990c \cdot 2.20 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 653 \text{ m}$$

Verdiene for Δs_j og Δs_m er her i pkt. c) kun basert på at Δt og Δt_0 er forskjellige på grunn av tidsdilatasjon. I pkt. b) fikk vi samme resultat for Δs_m (ut fra Δs_j) kun basert på lengdekontraksjon.

Løsning oppgave 4

Vi kaller lengden muonet tilbakelegger i jordas referansesystem S , hastigheten (i jordas referansesystem) $u_{\min}$ og tida det eksisterer målt fra jorda Δt og egentiden det eksisterer Δt_0 . Vi har da:

$$S = u_{\min} \cdot \Delta t = u_{\min} \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (u_{\min}/c)^2}} \quad (14)$$

som gir

$$\left(1 - \frac{u_{\min}^2}{c^2}\right) \cdot S^2 = (u_{\min} \cdot \Delta t_0)^2$$

og

$$\begin{aligned}
 u_{\min} &= \left(\frac{S^2}{\frac{S^2}{c^2} + (\Delta t_0)^2} \right)^{1/2} = c \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\Delta t_0 c}{S} \right)^2 \right)^{1/2}} \\
 &\approx c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t_0 c}{S} \right)^2 \right) \\
 &= c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2.20 \cdot 10^{-6} \cdot 2.997925 \cdot 10^8}{1.00 \cdot 10^4} \right)^2 \right) \\
 &\approx \underline{\underline{0.997825 \text{ c} \approx 2.9914 \cdot 10^8 \text{ m/s}}} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Vi kaller nå lengden fra jordas overflate til dannelsespunktet for muonet i jordas referansesystem for L_0 . Tilsvarende lengde i muonets referansesystem kalles L . Vi har da:

$$\begin{aligned}
 L &= L_0 (1 - (u_{\min}/c)^2)^{1/2} \\
 &= 1.00 \cdot 10^4 \text{ m} (1 - (0.997825)^2)^{1/2} \\
 &\approx \underline{\underline{6.59 \cdot 10^2 \text{ m}}} \quad (16)
 \end{aligned}$$

Løsning oppgave 5

Romskipet A har under hele tankeeksperimentet jevn og rettlinjet hastighet. Vi velger derfor å betrakte hele tankeeksperimentet i det inertialsystemet der A er i ro (under hele eksperimentet) og kaller i fortsettelsen dette for A 's referansesystem. I dette referansesystemet er trådens hastighet fra begynnelse til slutt endret fra null til $v = 6.00 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

Målt fra A 's referansesystem vil lengden av tråden (dersom den ikke strekkes eller går av) derfor være endret fra L_0 ved begynnelsestilstanden til L ved slutt-tilstanden, med følgende sammenheng mellom L_0 og L :

$$L = L_0/\gamma \quad (17)$$

der

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (18)$$

(Se lign. (65) og (67) i formelsamlingen vedlagt eksamensoppgaven).

Differansen mellom opprinnelig lengde L_0 av tråden og lengden målt i slutt-tilstanden fra A 's referansesystem (dersom tråden ikke brister eller forlenges) kaller vi ΔL . Da har vi:

$$\Delta L = L_0 - L \underset{(17)}{=} L\gamma - L = L(\gamma - 1) \quad (19)$$

som gir for $\Delta L/L$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L}{L} &= (\gamma - 1) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1 \\ &= \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{6.0 \cdot 10^6}{3.00 \cdot 10^8} \right)^2 = \underline{2.0 \cdot 10^{-4}}\end{aligned}\quad (20)$$

Sentrene til romskipene B og C har i A 's referansesystem hele tiden hatt samme akselerasjon og dermed hastighet. Avstanden mellom dem har dermed også alltid vært den samme og er det også etter akselerasjonprogrammet er avsluttet.

For at tråden ikke skal briste, må den derfor tåle forlengelsen ΔL gitt ovenfor ved ligning (19). ΔL og L er begge sett fra A 's referansesystem og tråden tåler observert fra hans (og alle andres inertiale) referansesystem kun en relativ forlengelse på $1.00 \cdot 10^{-4}$.

Den relative forlengelsen tråden må tåle for ikke å briste under akselerasjonsprosessen er altså gitt ved ligning (20) og lik $2.0 \cdot 10^{-4}$. Det er to ganger den forlengelsen den er oppgitt å skulle tåle.

Altså har tråden gått av under akselerasjonsprosessen.

Merknad:

Denne oppgaven ble gitt for å teste forståelsen av følgende fundamentale aspekt:

1) Avstanden mellom to punkt (her festepunktene til tråden) observert fra ett gitt inertialt referansesystem vil ikke endres når begge punktene hele tiden har samme hastighet observert i dette referansesystemet. Det er ingen forskjell på klassisk mekanikk og spesiell relativitetsteori når det gjelder dette fordi posisjonen til og avstanden mellom de to punktene hele tiden kan måles (dvs. kan merkes av på et fysisk legeme i ro) i dette referansesystemet.

2) Et fysisk legeme (her tråden) som har en hastighet i forhold til et referansesystem vil i dette referansesystemet observeres med mindre lengde enn den lengden som observeres i det referansesystemet der legemet er i ro. Dette er et av de fundamentale aspekt der spesiell relativitetsteori (og virkeligheten) gir et annet resultat enn klassisk mekanisk teori.

Løsning oppgave 6

a) Wiens lov gir:

$$\nu_{max} = 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K} \cdot 3200 \text{ K} = 1.88 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

og fotonenergien er følgende:

$$\nu_{max} = 6.626008 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 1.88 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 1.25 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{Antall utsendte fotoner pr. sek er da: } \frac{40 \text{ W}}{1.25 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \underline{\underline{3.2 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}}}$$

Ved avstand 2.0 m fra lyspæren fordeler fotonfluksen seg over et kuleskall med areal $4\pi(2.0 \text{ m})^2 = 16\pi \text{ m}^2$. Antall fotoner pr. m^2 er derfor:

$$\frac{3.2 \cdot 10^{20} \text{ s}^{-1}}{16\pi \text{ m}^2} = \underline{\underline{6.4 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}}$$

og antallet fotoner som passerer pupillen (med åpning $\pi(0.25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2$) er:

$$6.4 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot \pi(0.25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = \underline{\underline{1.3 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}}}$$

b) Energien til et foton med bølgelengde 550 nm er:

$$\begin{aligned} h\nu = hc/\lambda &= \frac{6.62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{550 \cdot 10^9 \text{ m}} \\ &= \underline{\underline{3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J}}} \end{aligned}$$

og antallet fotoner som treffer jordoverflaten pr. m^2 pr. sekund er:

$$\frac{1.0 \cdot 10^3 \text{ Wm}^{-2}}{3.61 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = \underline{\underline{2.8 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}}}$$

Antall fotoner som treffer innenfor en sirkel med diameter 5 mm er:

$$2.8 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \cdot \pi(0.25 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = \underline{\underline{5.5 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}}}$$

c) Energi pr. fotoen er:

$$h\nu = hc/\lambda = \frac{6.62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{600 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = \underline{\underline{3.31 \cdot 10^{-19} \text{ J}}}$$

og dersom lyset avgir effekten $P = 1.7 \cdot 10^{-18} \text{ W}$ til netthinnen, tilsvarer dette en fotonstrøm:

$$\frac{1.7 \cdot 10^{-18} \text{ W}}{3.31 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 5.1 \text{ s}^{-1} \approx \underline{\underline{5 \text{ s}^{-1}}}$$

Kommentar: Resultatene i pkt b) og c) viser hvor bemerkelsesverdig stort øyets følsomhetsområde er. Med en nedre følsomhetsgrense på ca. 5 fotoner pr. sekund til en øvre grense på ca. $5 \cdot 10^{16}$ fotoner pr. sekund spenner øyets dynamiske område over 16 dekader. (Det antas at det er mulig å se mot solen i ca. 1 sekund uten at øye skades.) Hvor imponerende dette er, blir klart ved å sammenligne med et fotomultiplikatorrør (PM-rør), som er en av de mest følsomme optiske detektorer mennesket har fremstilt. Under optimale forhold - som innebærer nedkjøling av fotokatoden og digitalisering av utgangssignalet - kan et slikt PM-rør telle ned mot 1 foton pr. sekund (og kanskje enda lavere). Imidlertid, PM-røret vil "gå i metning" ved $10^7 - 10^8$ fotoner pr. sekund, altså lenge før øyet "går i metning".