Løsning Øving 12

Løsning oppgave 1

a) Ifølge lign. (4.32) i forelesningene, er vinkelelen θ_1 mellom første og nullte ordens maksima gitt ved:

$$\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{d} \tag{1}$$

der d er spalteavstanden. Vi kan her nytte $\sin\theta_1 \approx \frac{y_1}{L}$ der y_1 er avstanden mellom nullte og første ordens maksima og L er avstand fra spaltene til filmen. Fra (1) har vi da:

$$y_1 = \frac{\lambda L}{d} = \frac{589 \cdot 10^{-8} \cdot 2.00}{0.12 \cdot 10^{-3}} \text{ m} = 0.00982 \text{ m} \approx \underline{\underline{9.8 \text{ mm}}}$$

b) Dette er det samme poblemet som i pkt. a, men med $\lambda \rightarrow \lambda_{\text{vann}} = \lambda/n$. Dermed:

$$y_1 = \frac{\lambda/n \cdot L}{d} = \frac{0.0982}{1.33} \text{ m} \approx \underline{\underline{7.4 \text{ mm}}}$$

Løsning oppgave 2

Fra forelesningene pkt. 4.5.2 (se spesielt lign. (4.46)) forstår vi at tykkelsen t av plastfolien må være så stor at:

$$k_{\text{plast}} \cdot t - k_{\text{vakuum}} \cdot t = \pi$$

dvs:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{plast}}} - \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vakuum}}}\right) \cdot t = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vakuum}}}(n_{\text{plast}} - 1) \cdot t = \pi$$

som gir:

$$t = \frac{\lambda_{\text{vakuum}}}{2} \cdot \frac{1}{n_{\text{plast}} - 1} = \frac{510}{2(1.60 - 1)} \text{ nm} = 425 \text{ nm} \approx \underline{\underline{430 \text{ nm}}}$$

Løsning oppgave 3

Den strålen som reflekteres i overgangen fra luft til såpefilm får et faseskift på π ved refleksjonen. Vi vil se den fargen som har bølgelengde λ som gir konstruktivt interferens. Dvs., dersom vi kaller tykkelsen av filmen t, må vi ha:

$$2t = (m + 1/2)\lambda_{\text{såpefilm}} = (m + 1/2) \cdot \frac{\lambda_{\text{vakuum}}}{n}$$

som gir:

$$\lambda_{\text{vakuum}} = \frac{2t \cdot n}{m + 1/2} = \frac{321.6}{m + 1/2} \text{ nm} \tag{2}$$

synlig lys har bølgelengde i området $400 - 700$ nm. (2) gir kun synlig lys om vi velger $m = 0$. Dermed:

$$\lambda_{\text{vakuum}} = \frac{321.6}{1/2} \text{ nm} \approx \underline{\underline{640 \text{ nm}}}$$

dvs, vi ser rødt lys.

Løsning oppgave 4

Vi får faseskift π ved begge overflater. For bølgelengden λ_1 som gir maksimum må vi derfor ha:

$$2t = m\frac{\lambda_1}{n_1} \tag{3}$$

der m er et heltall og t tykkelsen av filmen. For bølgelengden λ_2 som gir minimum:

$$2t = (m + 1/2)\frac{\lambda_2}{n_1} \tag{4}$$

(3) og (4) gir:

$$m\frac{\lambda_1}{n_1} = (m + 1/2)\frac{\lambda_2}{n_1}$$

$$m = \frac{\frac{1}{2}\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1/2 \cdot 520}{650 - 520} = 2 \tag{5}$$

som gir innsatt i (3):

$$t = \frac{2}{2} \cdot \frac{650}{1.36} \text{ nm} = 478 \text{ nm} \approx \underline{\underline{480 \text{ nm}}}$$

Løsning oppgave 5 (Eksamensoppgave 2 i Fysikk 3 2/12-1998)

a) Av figuren i oppgaveteksten ser vi at ganglengdeforskjellen mellom stråler fra S_1 og S_2 til P er $d \sin\theta$. Vi får da konstruktiv interferens, dvs. sentrum i de lysstripene eller lysmaksima for:

$$d \sin\theta = n\lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

dvs. for bøyningsvinkler θ gitt ved

$$\underline{\underline{\sin\theta = n\frac{\lambda}{d}}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{6}$$

Med $\lambda = 500$ nm og $d = 50$ μm gir (6):

$$\sin\theta = n \cdot 0.01, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Siden $\sin\theta$ maksimalt kan være 1, får vi altså lysmaksima for θ gitt ved:

$$\underline{\underline{\sin\theta = n \cdot 0.01}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 100 \tag{7}$$

b) Totalt felt E_θ i pkt. P er gitt ved:

$$E_\theta = E_1 + E_2 = E_0 \left\{\cos[kr - \omega t - \varphi] + \cos[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi]\right\} \tag{8}$$

Oppgitt:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \tag{9}$$

(9) i (8) med $a = kr - \omega t - \varphi$ og $b = k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi$ gir:

$$E_\theta = 2E_0 \cos\left(k\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \varphi\right)\cos\left(-\frac{k\Delta r}{2}\right) \tag{10}$$

Ved figurbetraktning:

$$\Delta r = d\sin\theta \tag{11}$$

Definerer:

$$\delta \equiv kd\sin\theta = k\Delta r \tag{12}$$

(11) og (12) innsatt i (10) gir:

$$E_\theta = \underbrace{2E_0\cos\frac{\delta}{2}}_{\equiv E_{\theta_0}}\cos(k(r + \Delta r/2) - \omega t - \varphi) = E_{\theta_0}\cos(\omega t + \varphi_1) \tag{13}$$

der vi har definert

$$\varphi_1 = k(r + \Delta r/2) - \varphi \tag{14}$$

For et gitt pkt. P er φ_1 konstant og ifølge det oppgitt får vi da:

$$I_\theta = \varepsilon_0 c_0 \overline{E_\theta^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0 E_{\theta_0}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c_0 \left(2E_0\cos\frac{\delta}{2}\right)^2 = 2\varepsilon_0 c_0 E_0^2\cos^2\frac{\delta}{2} \tag{15}$$

For $\theta = 0$:

$$I_0 = 2\varepsilon_0 c_0 E_0^2 \tag{16}$$

og dermed

$$\underline{\underline{I_\theta = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}}} \qquad \text{q.e.d.} \tag{17}$$

Vi får maksimum lysintensitet når

$$\frac{\delta}{2} = m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{18}$$

dvs. når:

$$\frac{kd \sin\theta}{2} = m\pi \tag{19}$$

eller (med $k = 2\pi/\lambda$) for:

$$\underline{\underline{\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}}}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20}$$

som er det samme som vi fikk i pkt. a.

c) Interferensmønsteret nær $\theta = 0$ vil ikke bli påvirket av at $l_c = 5\ \mu$m i stedet for at $l_c = \infty$, fordi ganglengdeforskjellen $d \sin\theta$ fra S_1 og S_2 til observasjonsskjermen B da er vesentlig mindre enn l_c. Siden l_c ikke påvirker middelbølgelengden vil ikke posisjonen til intensitetsmaksima bli endret verken for små eller store θ. Men når $d \sin\theta$ blir av samme størrelsesorden som l_c, dvs. når:

$$d \sin\theta \approx \pm l_c$$

eller

$$\sin\theta \approx \pm\frac{l_c}{d} = \pm\frac{5\ \mu\text{m}}{50\ \mu\text{m}} = \pm 0.1 \tag{21}$$

begynner det å bli mindre kontrast mellom lyse og mørke striper. Når $\sin\theta$ nærmer seg ± 1 vil veglengdeforskjellen nærme seg 50 μm dvs. $10 l_c$, og lys fra S_1 og S_2 er da tilnærmet inkoherent med hverandre og stripemønsteret utvisket.

d) Det lyset som går gjennom glassplaten og S_2 vil bli forsinket sammenlignet med det lyset som går gjennom S_1. Kalles tykkelsen av glassplaten b blir faseforskjellen Φ gitt ved:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda/n} \cdot b - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot b = (n-1)\frac{2\pi}{\lambda} \cdot b$$

Tilsvarende veglengdeforskjell i vakuum blir:

$$f = (n-1)b$$

Tilfelle 1:

$$f = (1.50 - 1.00) \cdot 500\ \text{nm} = 250\ \text{nm} = \frac{1}{2}\lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d\sin\theta = (n - 1/2)\lambda_m, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{22}$$

Dvs. vi får maksima der vi hadde minima uten glass og omvendt.

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved.

$$\sin\theta_1 = -\frac{1}{2}\frac{\lambda_m}{d} = -0.005 \tag{23}$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin\theta_1$ som den gjorde på begge sider av $\sin\theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å få full uttelling for tilfelle 1 siden det er så liten forskyvning.))

Tilfelle 2:

$$f = (1.50 - 1.00) \cdot 1000 \text{ nm} = 500 \text{ nm} = \lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da

$$d\sin\theta = (n - 1)\lambda_m, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{24}$$

Dvs. vi får lysmaksima og lysminima der vi hadde det uten glass.

(Sentrum av intererensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin\theta_2 = -\frac{\lambda_m}{d} = -0.01 \tag{25}$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin\theta_2$ som den gjorde på begge sider av $\sin\theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å få full uttelling for tilfelle 2 siden det er så liten forskyvning.))

Tilfelle 3:

$$f = (1.50 - 1.00) \cdot 30 \ \mu\text{m} = 15 \ \mu\text{m} = 30\lambda_m$$

Sentrum i det synlige interferensmønsteret vil nå være gitt ved:

$$\sin\theta_3 = -30\frac{\lambda_m}{d} = -0.30 \tag{26}$$

og de vinklene der interferensmønsteret begynner å bli utydelig finnes der gang-lengdeforskjellen er $l_c = 10\lambda_m$ forskjellig fra det gitt ved lign. (26), dvs. når:

$$\sin\theta = \frac{-30\lambda_m \pm 10\lambda_m}{d}$$

dvs. når:

$$\sin\theta = \left\{ \begin{array}{c} -0.2 \\ -0.4 \end{array} \right\} \tag{27}$$

(I den grad lysmaksima kan sees på samme sted som uten glass vil de ha samme posisjon som disse, men vi har altså ikke tydelige lysmaksima på samme sted som når vi ikke har glass foran S_2.)

Tilfelle 4: $b = 1000\ \mu\text{m}$

$$f = (1.50 - 1.00) \cdot 1000\ \mu\text{m} = 500\ \mu\text{m} = 100 l_c$$

Den minste optiske veglengdeforskjell vi da kan få på skjermen er

$$f - d = 500\ \mu\text{m} - 50\ \mu\text{m} = 450\ \mu\text{m} = 90 l_c$$

Dvs. at intet lys fra S_1 som er tilnærmet koherent med lys fra S_2 kan møtes på noe punkt på observasjonsskjermen B. Vi får derfor bare en jevn lysfordeling på denne og intet interferensmønster.

e) Vi har også her at

$$\Delta r = d \sin\theta \tag{28}$$

og setter

$$\delta \equiv k\Delta r = kd \sin\theta \tag{29}$$

Vi får da:

$$\Psi_\theta = \Psi_1 + \Psi_2 = \psi_0 \left[e^{i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right] \tag{30}$$

og dermed

$$\begin{aligned} |\Psi_\theta|^2 = \Psi_\theta \cdot \Psi_\theta^* &= |\psi_0|^2 \left[e^{i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right] \cdot \left[e^{-i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{-i[k(r+\Delta r) - \omega t - \varphi]} \right] \\ &= |\psi_0|^2 \left[1 + e^{-ik\Delta r} + e^{ik\Delta r} + 1 \right] = |\psi_0|^2 \cdot 2[1 + \cos\delta] = \underline{\underline{4|\psi_0|^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}}} \end{aligned} \tag{31}$$

Ifølge Max Borns sannsynlighetsinterpretasjon er $|\Psi_\theta|^2$ sannsynlighetstettheten for ett (dvs. hvert) elektrons treffpunkter.