Løsning Øving 8

Løsning oppgave 1

Fra lign. (2.42) i forelesningene har vi for målt frekvens f_m når $v_m/c \ll 1$

$$f_m \approx f_s(1 - v_m/c)$$

som gir:

$$\begin{aligned}\frac{v_m}{c} &\approx \frac{f_s - f_m}{f_s} = \frac{c/\lambda_s - c/\lambda_m}{c/\lambda_s} \\ &= \frac{\lambda_m - \lambda_s}{\lambda_m} = \frac{663 - 656}{663} \approx 1.06 \cdot 10^{-2} \approx 0.011\end{aligned}$$

som med $c = 3.0 \cdot 10^8$ m/s gir

$$v_m \approx 0.011 \cdot 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{3.2 \cdot 10^6 \text{ m/s}}}$$

(Det viser seg altså at $v_m/c \ll 1$ slik at forutsetningen for å nytte lign. (2.42) er svært godt oppfylt)

Løsning oppgave 2

Vi betrakter bare det elektriske feltet (det magnetiske står normalt på) og har da fra de to antennene i pkt. P (E_0 er amplituden i pkt. P, men ikke uavhengig av avstanden til pkt. P):

$$\vec{E_1} = \vec{e_x} E_0 \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \tag{1}$$

$$\vec{E_2} = \vec{e_y} E_0 \cos(k[z + L] - \omega t + \varphi_2) \tag{2}$$

der

$$\varphi_2 - \varphi_2 = \omega\tau \tag{3}$$

Vi får lineærpolarisert lys dersom $\vec{E_1}$ og $\vec{E_2}$ har faseforskjeller på $n \cdot \pi$ der $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fordi $\vec{E_1} + \vec{E_2}$ da blir rettlinjet som funksjon av t. Polariasjonen skifter $90°$ for $\Delta n = 1$. I følge en slik generalisering av det vi lærte i Oppgave 2 i Øving 3, får vi sirkulær polarisering dersom faseforskjellen er $(2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ med $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Dermed:

a) Lineærpolariserng for:

$$\begin{aligned}
&(k(z+L)-\omega t+\varphi_2)-(kz-\omega t+\varphi_1)\\
&=\varphi_2-\varphi_1+kL=\omega\tau+kL=2\pi f\tau+2\pi f\frac{L}{c}\\
&=n\pi \qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots
\end{aligned}$$

som gir:

$$\underline{\underline{f\tau+\frac{fL}{c}=\frac{n}{2}}} \tag{4}$$

(der $f = 10$ MHz)

b) Sirkulær polarisering for

$$\begin{aligned}
&(k(z+L)-\omega t+\varphi_2)-(kz-\omega t+\varphi_1)\\
&=2\pi f\tau+2\pi f\frac{L}{c}\\
&=(2n+1)\pi/2 \qquad n=0,\pm1,\pm2,\dots
\end{aligned}$$

som gir:

$$\underline{\underline{f\tau+\frac{fL}{c}=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}} \tag{5}$$

c) For å få skiftet polarisering 90° må vi $\Delta n = 1$. Skal det oppnås bare ved å variere L, får vi fra (4):

$$\frac{f\cdot\Delta L}{c}=\frac{1}{2}$$

eller:

$$\Delta L=\frac{c}{2f}=\frac{\lambda}{2}$$

og med $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00\cdot 10^8}{10\cdot 10^6}$ m $= 30$ m:

$$\Delta L=\frac{\lambda}{2}=\underline{\underline{15\text{ m}}}$$

Løsning oppgave 3

For denne oppgaven viser vi til muntlig kommentar på forelesning.

Løsning oppgave 4 (Eksamensoppgave 2/12 1998)

a) Fasehastigheten:

$$\underline{\underline{v_f}} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda = 9.0 \text{ s}^{-1} \cdot 1.0 \text{ m} = \underline{\underline{9.0 \text{ m/s}}}$$

Det at en harmonisk vandrebølge $D(x,t)$ med vilkårlig frekvens ν (eller vinkelfrekvens $\omega = 2\pi\nu$) oppfyller bølgeligningen (1) i øvingsoppgaven betyr at ligningens venstre og høyre side blir like ved innsetting av $D(x,t)$, slik denne er gitt i likning (2) i oppgaveteksten. Ved innsetting:

$$\begin{aligned}
&VS: \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-kD_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)\right) = -kD_0\left(k\cos(kx - \omega t + \varphi)\right) \\
&= -k^2 D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -k^2 D(x,t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&HS: \\
&K\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right) \\
&= K\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega D_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)\right) = \omega D_0 K(-\omega)\left(\cos(kx - \omega t + \varphi)\right) \\
&= -\omega^2 K D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -\omega^2 K D(x,t)
\end{aligned}$$

For at $VS = HS$, må vi ha at $-k^2 = -\omega^2 K$ eller:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot k = \text{konstant} \cdot k \qquad \text{Q.E.D.}$$

hvor konstanten $\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{\sqrt{\mu/F_T}}$

b) Bølgepulsen vil ikke endre form da vi for bølger på streng ikke har dispersjon (som vist i pkt. a), dvs:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \text{konstant} \quad (= \sqrt{F_T/\mu})$$

uavhengig frekvensen. Alle frekvenskomponentene har derfor samme fasehastighet, hvilket betyr at det innbyrdes faseforholdet mellom de forskjellige komponentene (som bestemmer pulsens form) ikke endres.

Når vi ikke har dispersjon, vil vi ha for gruppehastigheten:

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = v_f = \text{konstant} = \sqrt{F_T/\mu}$$

Gruppehastigheten er i dette tilfellet lik fasehastigheten og entydig gitt av strengens egenskaper (μ og F_T). Gruppehastigheten for pulsen må derfor ha samme tallverdi som fasehastigheten beregnet i punkt a).

$$\underline{\underline{v_g = v_f = 9.0 \text{ m/s}}}$$

c) Fra likn. (4) i oppgaveteksten finner vi:

$$\begin{aligned}
v_f &= \frac{\omega}{k} = \frac{1}{A + Bk^2} \\
v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\frac{k}{A + Bk^2}\right) \\
&= \frac{1}{A + Bk^2} + k \cdot \frac{(-1)\cdot 2Bk}{(A + Bk^2)^2} = \frac{A - Bk^2}{(A + Bk^2)^2}
\end{aligned}$$

Vi har vha. lign. (3) i oppgaven:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0/n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot \left(1.509 + \frac{4.68 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2}{\lambda_0^2}\right)$$

For grønt lys:

$$k^g = \frac{2\pi}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}\left(1.509 + \frac{4.68 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2}{(500 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2}\right) = \underline{1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}$$

Denne verdien innsatt i overstående uttrykk for v_f og v_g gir:

$$\underline{\underline{v_f^g}} = \frac{1}{5.032 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}\text{s} + 1.65 \cdot 10^{-25} \text{ ms} \cdot (1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1})^2} = \underline{\underline{1.964 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

$$\underline{\underline{v_g^g}} = \frac{5.032 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}\text{s} - 1.65 \cdot 10^{-25} \text{ ms} \cdot (1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1})^2}{[5.032 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-1}\text{s} + 1.65 \cdot 10^{-25} \text{ ms} \cdot (1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1})^2]^2} = \underline{\underline{1.917 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

d) På samme måte som bølgetallet k og gruppehastigheten v_g for grønt lys ble beregnet i pkt. c), finner vi for fiolett og rødt lys:

$$k^f = 2.42 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \qquad \text{og} \qquad k^r = 1.36 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$v_g^f = 1.876 \cdot 10^8 \text{m/s} \qquad \text{og} \qquad v_g^r = 1.952 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

Forskjell i ankomsttid for rødt og fiolett lys blir:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Delta t}} &= \frac{100 \text{ m}}{1.876 \cdot 10^8 \text{ m/s}} - \frac{100 \text{ m}}{1.951 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \\
&= 533 \text{ ns} - 513 \text{ ns} = \underline{\underline{20 \text{ ns}}}
\end{aligned}$$