NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK
Onsdag 20. desember 2006 kl. 0900 - 1300
Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

Vedlegg A: Oppgavene (Side 2 - 6).
Vedlegg B: Formelsamling (Side 7 - 15).

Prøva består av 4 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderinga. Vektorstørrelser angis med **feite** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

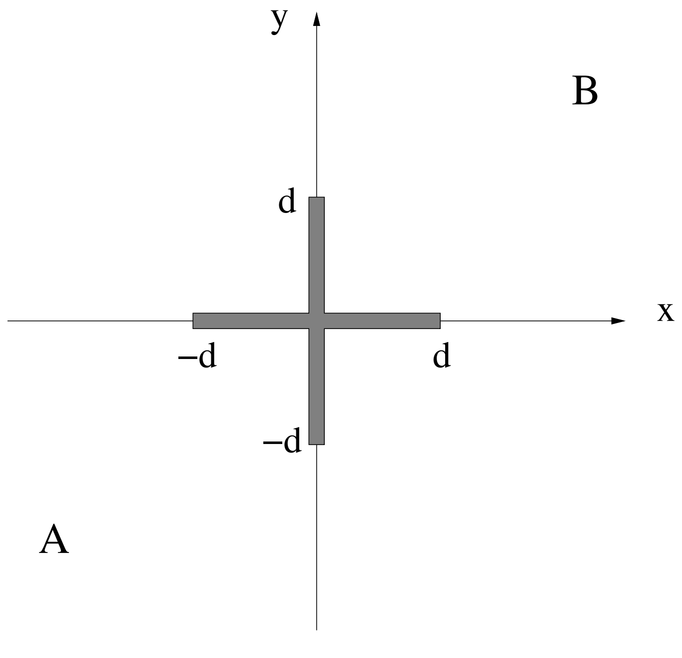
Sensuren kommer når den er klar, seinest 12. januar.

Vedlegg A: Oppgavene

OPPGAVE 1 [1a, 1b og 1c teller 10% hver]

a) En gitarstreng med lengde $L = 65$ cm er festet i begge ender (dvs knutepunkter der). Grunntonen (dvs laveste resonansfrekvens) og overtonene genereres av stående transversale bølger på strengen. Den skal stemmes slik at grunntonen er en (høy) E med frekvens $\nu_1 = 330$ Hz. Strengen har sirkulært tverrsnitt med radius $R = 0.35$ mm og er laget av nylon, med massetetthet $\rho = 1200$ kg/m^3.
• Bestem grunntonens bølgelengde λ_1 og bølgehastighet v_1. Med hvor stor strekk-kraft S må strengen strammes?
• Bestem bølgelengden, frekvensen og bølgehastigheten til 1. overtone (dvs nest laveste resonansfrekvens).
• Lyden fra gitaren forplanter seg i lufta omkring med hastighet 340 m/s. Hvilken frekvens vil grunntonen ha i dine ører dersom du beveger deg bort fra gitaren med hastighet 34 m/s?

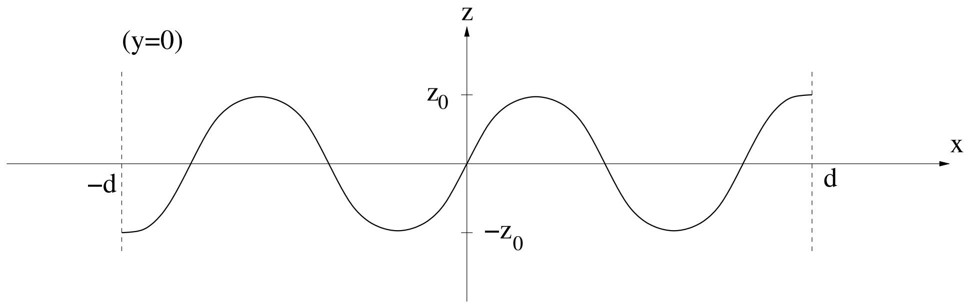
b) En tynn membran (f.eks. papir) er plassert i xy-planet. Et laseroptisk instrument kan måle transversalt utsving på membranen, for $-d < x < d$ når $y = 0$ og for $-d < y < d$ når $x = 0$:

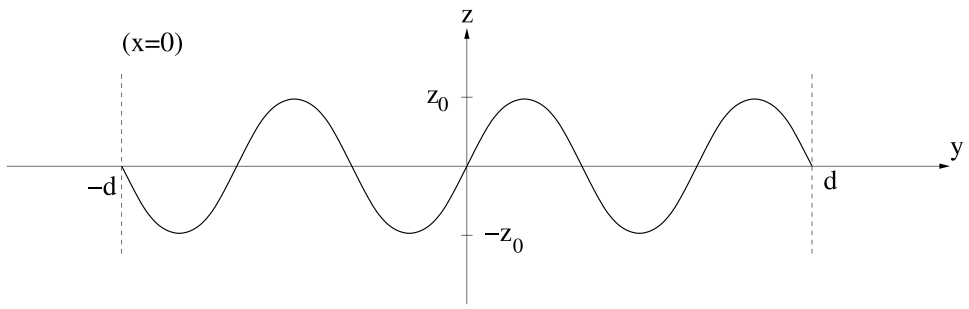


Membranen har stor utstrekning, både i x- og y-retning, i forhold til d. En plan harmonisk transversal bølge (z = utsvinget, $\boldsymbol{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$),

$$z(\boldsymbol{r}, t) = z_0 \sin\left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right),$$

forplanter seg i membranen, med retning fra område A mot område B (dvs mot høyre og oppover i figuren). Ved tidspunktet $t = 0$ viser instrumentet følgende utsving:





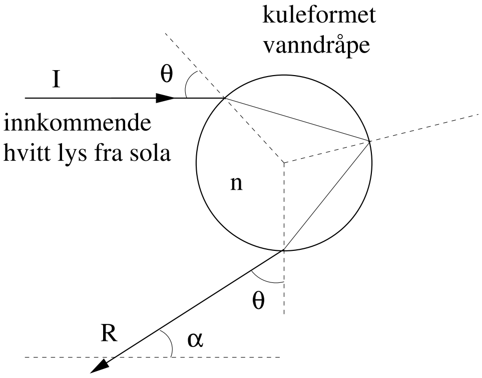
• Anta at $d = 10$ cm. Bestem bølgens bølgelengde λ.
• Bestem bølgens forplantningsretning. Angi denne ved vinkelen θ mellom forplantningsretningen og x-aksen.
• Med et annet instrument er bølgens frekvens målt til $\nu = 100$ Hz. Hva blir bølgens hastighet $\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y}$? (Bestem både v, v_x og v_y.)

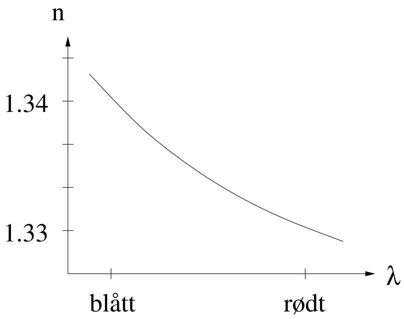
c) Longitudinale bølger som forplanter seg i en kubisk krystall kan med god tilnærmelse beskrives ved dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = \omega_0 \sin\left(\frac{kd}{2}\right) \qquad (k \geq 0)$$

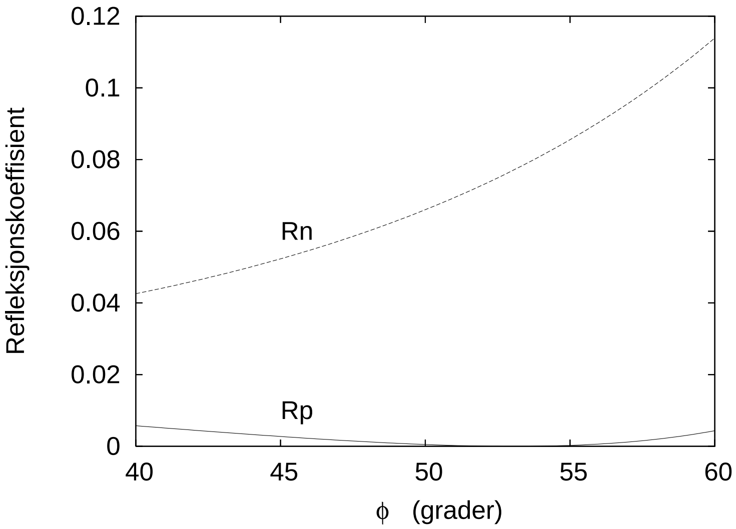
Her er $\omega_0 \equiv \sqrt{4s/m}$, m er massen til hvert enkelt atom i krystallen og s er "fjærkonstanten" som beskriver kreftene som virker mellom atomene. Avstanden mellom to "nærmeste nabo" atomer er d.
• Bestem fasehastigheten $v(k)$ og gruppehastigheten $v_g(k)$ for slike longitudinale bølger.
• Skisser $v(k)$ og $v_g(k)$ for bølgetall k mellom 0 og π/d. Verdier for $v(0)$, $v_g(0)$, $v(\pi/d)$ og $v_g(\pi/d)$ skal gå klart fram (i tekst eller figur).

OPPGAVE 2 [Teller 30%]





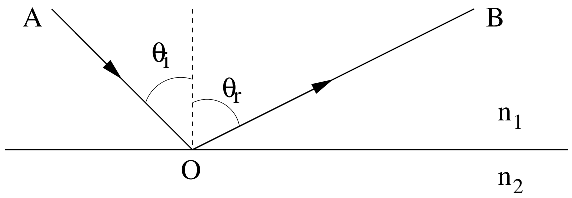
• Beskriv hvordan (den primære) regnbuen dannes med utgangspunkt i figurene over.
• Finn vinkelen α uttrykt ved θ og n (n er vannets brytningsindeks; luftas brytningsindeks settes lik 1).

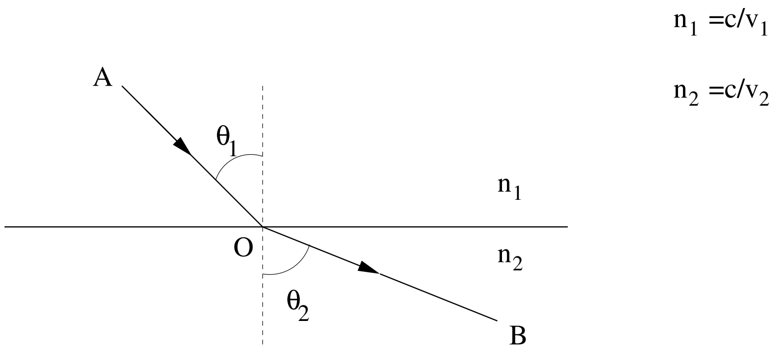


• Figuren viser refleksjonskoeffisienter (refleksjonssannsynligheter) når synlig lys reflekteres ved en vann/luft grenseflate. ϕ er vinkelen mellom innfallsloddet (dvs normalen til grenseflaten) og forplantningsretningen til innkommende bølge. Kurven merket Rp gjelder for lys som er polarisert slik at $\boldsymbol{E}$ ligger *i* innfallsplanet mens kurven merket Rn gjelder for lys som er polarisert slik at $\boldsymbol{E}$ står *normalt på* innfallsplanet. (Innfallsplanet dannes av innkommende, reflektert og brutt stråle, samt innfallsloddet.) Anta at lyset fra sola (I) som treffer vanndråpene er upolarisert. Hvordan forventer du da at lyset fra regnbuen (R) fortrinnsvis vil være polarisert? Tegn en figur der du viser retningen på $\boldsymbol{E}$ i ulike posisjoner på regnbuen, f.eks. øverst og nede ved horisonten.

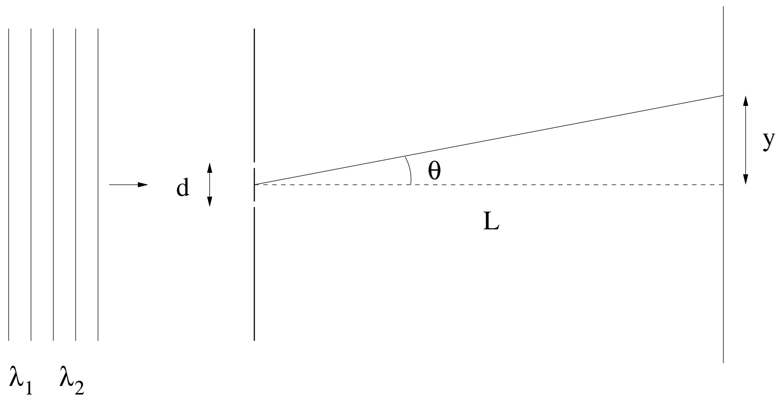
OPPGAVE 3 [3a og 3b teller 10% hver]

a) Fermats prinsipp sier at en lysstråle velger den veien mellom to punkter A og B som tar kortest tid. Bruk dette prinsippet til å utlede refleksjonsloven, $\theta_i = \theta_r$, og Snells brytningslov, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Ta utgangspunkt i figuren nedenfor, der vi betrakter lysstråler som går fra posisjon A til posisjon B via en posisjon O i grenseflaten mellom de to mediene.





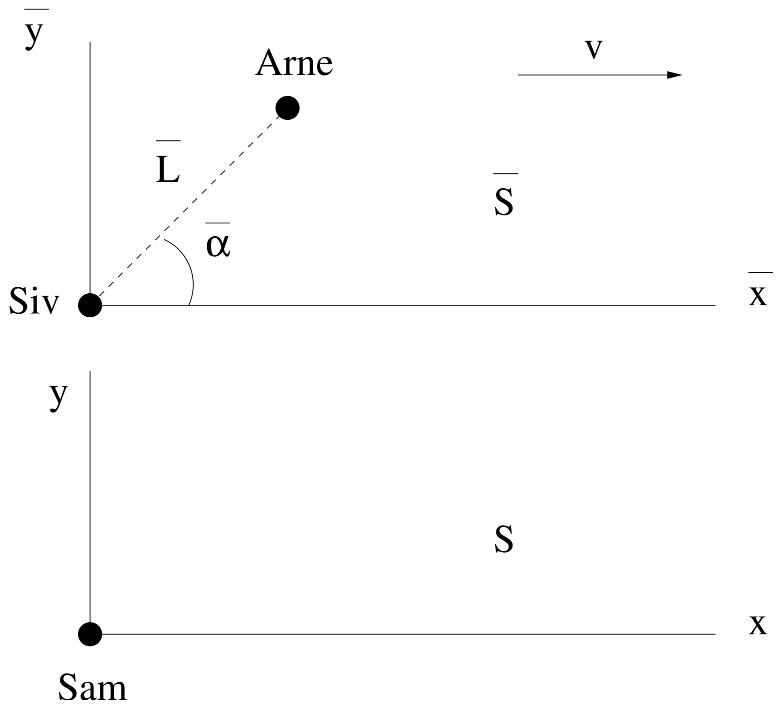
b) Koherent lys fra to lasere, med bølgelengder henholdsvis $\lambda_1 = 500$ nm og $\lambda_2 = 700$ nm, kommer normalt inn mot en skjerm med to svært smale åpninger (spalter) med innbyrdes avstand $d = 0.035$ mm. Interferensmønsteret observeres på en skjerm i avstand $L = 3.0$ m fra de to spaltene.



I hvilken posisjon y (i forhold til "rett fram", $y(\theta = 0) = 0$) finner vi første felles intensitetsmaksimum for lyset fra de to laserne?

OPPGAVE 4 [Teller 20%]

Siv og Arne kjører i hvert sitt romskip. Begge romskipene har hastighet $\boldsymbol{v} = v\,\hat{x}$ i forhold til Sam. Sam befinner seg altså i et annet inertialsystem (S) enn Siv og Arne ($\overline{\text{S}}$). Målt i $\overline{\text{S}}$ er avstanden mellom Siv og Arne lik $\overline{L}$, og Arne befinner seg litt "foran" og litt "over" Siv slik at forbindelseslinjen mellom de to danner vinkelen $\overline{\alpha}$ med $\overline{x}$-aksen:



"Foran" og "over" innebærer altså at Arnes koordinater $\overline{x}$ og $\overline{y}$ begge er større enn de tilsvarende koordinatene til Siv.

- Hvor stor avstand L måler Sam at det er mellom Siv og Arne?
- Hvilken vinkel α måler Sam mellom x-aksen og forbindelseslinjen fra Siv til Arne?

Siv sender en lyspuls mot Arne. Målt i $\overline{\text{S}}$ må denne lyspulsen åpenbart sendes ut i en vinkel $\overline{\alpha}$ i forhold til $\overline{x}$-aksen dersom den skal nå fram til Arne.

- I hvilken retning, angitt ved en vinkel β i forhold til x-aksen, måler Sam at lyspulsen sendes? (Tips: Vinklene β og α er ikke like store.)

Vi antar nå at Arne er like langt foran som over Siv, målt i $\overline{\text{S}}$, slik at $\overline{\alpha} = 45°$. Vi antar dessuten at $\overline{L} = 3000$ m og $v = 0.8c$, og vi setter lyshastigheten lik $3 \cdot 10^8$ m/s.

- Hvor lang tid tar det, på Sams klokke, fra Siv sender ut lyspulsen til den mottas av Arne?

Vedlegg B: Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$
- Bølgeligning:
$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$
- Fasehastighet:
$$v = \frac{\omega}{k}$$
- Gruppehastighet:
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$
- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:
$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$
- Generelt for lineær respons i elastiske medier:
$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$
- For transversale bølger på streng:
$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$
- For longitudinale bølger i fluider:
$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$
- For longitudinale bølger i faste stoffer:
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A\rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\mathrm{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt:

$$\nu_\mathrm{O} = \frac{1 - v_\mathrm{O}/v}{1 - v_\mathrm{S}/v}\, \nu_\mathrm{S}$$

- For sjokkbølger:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_\mathrm{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0\overline{E^2} = c\varepsilon_0\langle E^2\rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}
\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}
\Delta D_{\perp} &= 0 \\
\Delta E_{\parallel} &= 0 \\
\Delta B_{\perp} &= 0 \\
\Delta H_{\parallel} &= 0
\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu\left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.