NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN I
TFY4160 BØLGEFYSIKK
Torsdag 9. august 2007 kl. 0900 - 1300

Eksamen bestod av 5 oppgaver. Løsningsforslaget er på 7 sider (inklusive denne).

OPPGAVE 1

Kraft på m:

$$F = -kx - b\dot{x}$$

(Fortegnene: Positivt utsving $x > 0$ (dvs mot høyre) gir negativ kraft (dvs mot venstre). Positiv hastighet $\dot{x} > 0$ (dvs mot høyre) gir negativ kraft (dvs mot venstre).)
Newtons 2. lov:

$$F = m\ddot{x}$$

Dermed:

$$m\ddot{x} + kx + b\dot{x} = 0$$

For å vise at oppgitt $x(t)$ er løsning av denne ligningen, må vi regne ut $\dot{x}$ og $\ddot{x}$:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= A\left[-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \phi) - \omega e^{-t/\tau}\sin(\omega t + \phi)\right] \\
\ddot{x} &= A\left[\frac{1}{\tau^2}e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \phi) + \frac{2\omega}{\tau}e^{-t/\tau}\sin(\omega t + \phi) - \omega^2 e^{-t/\tau}\cos(\omega t + \phi)\right]
\end{aligned}$$

Vi setter inn og samler ledd proporsjonale med henholdsvis $\cos(\omega t + \phi)$ og $\sin(\omega t + \phi)$. Alle ledd vil inneholde en felles faktor $A\exp(-t/\tau)$ som kan strykes. Vi får:

$$\cos(\omega t + \phi)\left[\frac{m}{\tau^2} - m\omega^2 - \frac{b}{\tau} + k\right] + \sin(\omega t + \phi)\left[\frac{2m\omega}{\tau} - b\omega\right] = 0$$

Hvis dette skal gjelde til alle tider t, må uttrykkene i hakeparentesene være lik null hver for seg. Den siste av de to gir da

$$\tau = \frac{2m}{b}$$

Vi setter dette inn for τ i den første hakeparentesen og finner

$$m \cdot \frac{b^2}{4m^2} - m\omega^2 - \frac{b^2}{2m} + k = 0$$

dvs

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$$

Ved et gitt tidspunkt består systemets energi E av kinetisk energi $E_k = m\dot{x}^2/2$ og potensiell energi $E_p = kx^2/2$. På grunn av dempingen reduseres E etter hvert som tiden går. (Den "tapte" energien kan gjenfinnes som økt termisk energi i dempemekanismen.) Når dempingen er svak, og dermed $\omega \gg 1/\tau$, kan vi med god tilnærmelse sette $E = E_p$ og $E_k = 0$ når $|\cos(\omega t + \phi)| = 1$ og $\sin(\omega t + \phi) = 0$. Da er $x = x_{\max} \simeq A\exp(-t/\tau)$ mens $\dot{x} = 0$. Dermed kan vi skrive

$$E(t) = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 \simeq \frac{kA^2}{2}e^{-2t/\tau}$$

Relativt energitap etter 50 perioder av svingningen blir

$$\frac{E(t) - E(t + 50T)}{E(t)} = 1 - e^{-100T/\tau} = 1 - e^{-100\pi b/\omega m} \simeq 1 - e^{-100\pi b/\omega_0 m} = 1 - e^{-100\pi b/\sqrt{km}}$$

som altså maksimalt skal være 1%, dvs 0.01. Med andre ord,

$$b_{\max} = -\frac{\sqrt{km}}{100\pi} \ln 0.99 \simeq 3 \cdot 10^{-4}$$

i SI-enheter kg/s.

OPPGAVE 2

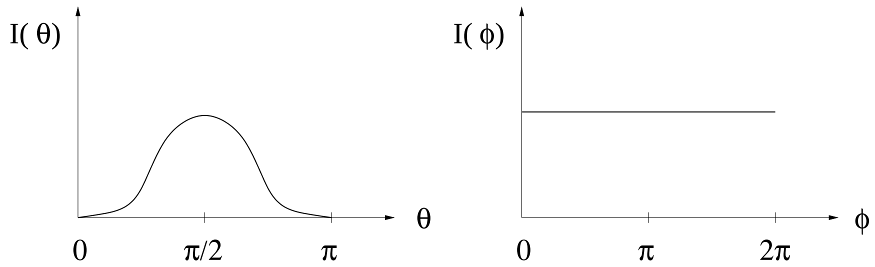
Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{16\pi^2 c r^2} \cos^2\left[\omega(t - r/c)\right] \hat{r}$$

siden $\hat{\theta} \times \hat{\phi} = \hat{r}$, noe vi ser av figuren i oppgaveteksten.
Strålingsintensiteten $I(\boldsymbol{r})$ er (som gitt i oppgaven) middelverdien av absoluttverdien til Poyntings vektor, dvs midlet over en (eller flere) perioder. Den eneste tidsavhengige faktoren er $\cos^2\left[\omega(t - r/c)\right]$, som oscillerer mellom verdiene 0 og 1. Tidsmiddelet av denne funksjonen er åpenbart lik 1/2, for eksempel fordi $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Dermed har vi uten videre at

$$I(\boldsymbol{r}) = I(r, \theta) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 c r^2}$$

I som funksjon av θ og ϕ:



Den elektromagnetiske energien stråler radielt utover. Tallverdien av Poyntings vektor angir utstrålt energi pr tidsenhet og pr flateenhet (dvs effekt pr flateenhet). Gjennom et lite element $dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ av en kuleflate med radius r vil det dermed, pr tidsenhet, i gjennomsnitt (dvs midlet over en periode) strømme en energi

$$\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{A} = S \cdot dA = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 c r^2} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

Vi finner midlere total utstrålt effekt $\langle P \rangle$ ved å integrere dette uttrykket over hele kuleflaten, dvs vinkelen θ fra 0 til π og vinkelen ϕ fra 0 til 2π:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta$$

Faktoren $\sin^3\theta$ kan omskrives med det oppgitte uttrykket slik at integralet over θ blir

$$\int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{4}\left(\sin 3\theta - 3\sin\theta\right)\right] d\theta = |_0^{\pi} \left[\frac{1}{12}\cos 3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta\right] = \frac{4}{3}$$

Følgelig:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

som skulle vises.
Utstrålt effekt øker forholdsvis raskt med strålingens (vinkel-)frekvens, $\langle P \rangle \sim \omega^4$. Blått lys har høyere frekvens enn rødt lys. Atmosfæren inneholder molekyler som fungerer som små elektriske dipoler som kan absorbere og reemittere strålingen fra sola. Denne prosessen er dermed betydelig mer effektiv for blått lys enn for rødt lys. Når vi ser opp på himmelen, ser vi sollys som er spredt av atmosfæren, fortrinnsvis blått. Ved solnedgang (og soloppgang) ser vi, nede ved horisonten, sollys som *ikke* er spredt av atmosfæren, fortrinnsvis rødt.

OPPGAVE 3

Uniform intensitet over halvkulen gir

$$I_1 = \frac{P_1}{A_1} = \frac{P_1}{2\pi r_1^2} = \frac{1.0}{2\pi \cdot 16} \simeq 0.01 \text{ W/m}^2$$

Dette tilsvarer et lydnivå

$$\beta = 10 \log(10^{-2}/10^{-12}) = 100 \text{ dB}$$

Total partikkelutsvingsbølge $\xi(x,t)$ blir summen av delbølgene ξ_1 og ξ_2:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \left[\sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t)\right]$$

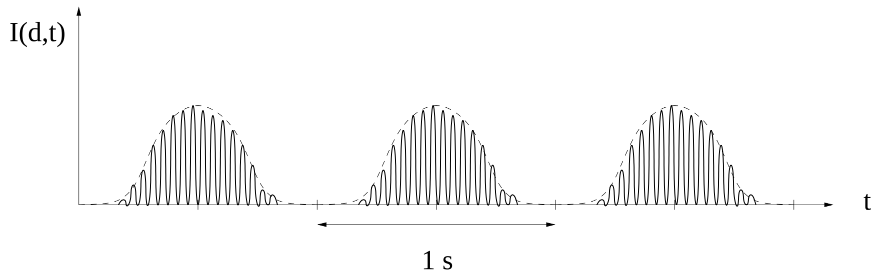
Oppgitt trigonometrisk sammenheng gir

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$

Lydintensitetens avhengighet av t i avstanden $x = d$ blir dermed

$$I(d,t) \sim |\xi(d,t)|^2 = 4\xi_0^2 \cos^2\left(\frac{k_2-k_1}{2}d - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \sin^2\left(\frac{k_1+k_2}{2}d - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

Dette er produktet av en raskt og en langsomt varierende funksjon:



Den langsomme funksjonen, $\cos^2(\Delta k \cdot d - \Delta\omega \cdot t)$ (der $\Delta k = (k_2 - k_1)/2$ og $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$) sørger for at intensiteten varierer mellom 0 og en maksimal verdi. Tiden T_s ("sveveperioden") mellom to maksima er gitt ved $T_s \Delta\omega = \pi$. Vi har $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)/2 = \pi(\nu_2 - \nu_1)$ slik at

$$T_s = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} = 1 \text{ s}$$

Den raske funksjonen, $\sin^2(\overline{k}d - \overline{\omega}t)$ (der $\overline{k} = (k_1 + k_2)/2$ og $\overline{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$) gir "tonen", med frekvens $\overline{\nu} = \overline{\omega}/2\pi = (\nu_1 + \nu_2)/2 = 440.5$ Hz. Vi hører altså en lyd med denne frekvensen, med en lydstyrke (intensitet) som varierer med en periode på 1 sekund.

Bølgelengden er $\lambda = v/\nu = 340/3400 = 0.10$ m.
I en retning gitt ved vinkelen θ vil veilengdeforskjellen fra de to høyttalerne til øret ditt være omtrent lik $a \sin\theta$, der a er avstanden mellom høyttalerne. Dersom denne veilengdeforskjellen er lik en halv bølgelengde, vil de to delbølgene interferere destruktivt og gi null intensitet. Dette inntreffer altså når

$$a \sin\theta = \lambda/2$$

dvs

$$\theta = \arcsin(\lambda/2a) = \arcsin(1/6) \simeq 10^\circ$$

Det betyr at du må flytte deg en avstand

$$\Delta y = d \tan\theta \simeq d \sin\theta = d/6 \simeq 1.7 \text{ m}$$

mot høyre eller venstre for at lyden skal forsvinne.

OPPGAVE 4

Vi må finne total kraft som virker på massen med likevektsposisjon x. Hver masse påvirkes av to krefter, en fra fjæra til høyre og en fra fjæra til venstre. Fjæra til høyre er strukket en lengde $\xi(x + d) - \xi(x)$. (Alle utsving er her ved tid t, så det er underforstått at $\xi(x) = \xi(x, t)$ osv.) Dersom strekket er negativt, innebærer det en sammenpressing. Strukket fjær til høyre innebærer en kraft F_+ rettet mot høyre. Dermed:

$$F_+ = k\,[\xi(x + d) - \xi(x)]$$

Fjæra til venstre er strukket en lengde $\xi(x) - \xi(x - d)$. Strukket fjær til venstre innebærer en kraft F_- rettet mot venstre. Dermed:

$$F_- = -k\,[\xi(x) - \xi(x - d)]$$

Total kraft:

$$F = F_+ + F_- = k\,[\xi(x + d) + \xi(x - d) - 2\xi(x)]$$

Newtons 2. lov:

$$F = m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

Den eksakte bevegelsesligningen for vårt modellsystem blir dermed

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{k}{m}\,[\xi(x + d) + \xi(x - d) - 2\xi(x)]$$

Dersom vi antar at $\xi(x)$ varierer langsomt (dvs: bølgelengder λ store i forhold til d), kan vi bruke den oppgitte rekkeutviklingen av $\xi(x \pm d)$. Da blir kraften på m

$$F \simeq kd^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

og bevegelsesligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{kd^2}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Dette er på den oppgitte formen, med bølgehastighet

$$v = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}$$

Vi velger et spesialtilfelle, nærmere bestemt en harmonisk bølge, som utgangspunkt for å diskutere energien som transporteres langs transmisjonslinjen. Kinetisk energi for massen m er

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\xi_0^2\cos^2(kx - \omega t)$$

Potensiell energi lagret i fjæra til høyre for m er

$$E_p = \frac{1}{2}k\left[\xi(x+d) - \xi(x)\right]^2 \simeq \frac{1}{2}kd^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}kd^2k^2\xi_0^2\cos^2(kx - \omega t)$$

Ettersom $v = \omega/k$, er $\omega^2 = v^2k^2 = (kd^2/m)k^2$, og dermed $kd^2k^2 = m\omega^2$, så $E_p = E_k$. Total energi pr "masse-fjær-enhet" er derfor

$$E = E_k + E_p = 2E_k = m\omega^2\xi_0^2\cos^2(kx - \omega t)$$

Med massetetthet (dvs masse pr lengdeenhet) $\mu = m/d$, blir total energi pr lengdeenhet

$$\varepsilon = \frac{E}{d} = \mu\omega^2\xi_0^2\cos^2(kx - \omega t)$$

Siden energien pr lengdeenhet er en funksjon på formen $\varepsilon(x - vt)$, betyr det at ε oppfyller bølgeligningen. Da må energien også forplante seg med hastighet v langs transmisjonslinjen. Midlere energi pr lengdeenhet, $\overline{\varepsilon}$, finner vi ved å midle ε over en bølgelengde. Middelverdien av $\cos^2(kx - \omega t)$ er $1/2$, så

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

I løpet av tiden T (dvs en periode) vil energien på et intervall mellom $x - \lambda$ og x passere ved x. Dette er nettopp den midlere energien pr tidsenhet som vi her er på jakt etter (eventuelt effekten):

$$\langle P \rangle = \overline{\varepsilon} \cdot \frac{\lambda}{T} = \overline{\varepsilon}v = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

OPPGAVE 5

Lyssignalene fra stjernen starter i henholdsvis (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ved tidspunktene t_1' og t_2' og når fram til jorda, dvs til posisjonene $(x_1, 0)$ og $(x_2, 0)$ ved tidspunktene t_1 og t_2. Lyset reiser med hastighet c, så vi må ha sammenhengene

$$\begin{aligned} c(t_1 - t_1') &= y_1 \\ c(t_2 - t_2') &= y_2 \end{aligned}$$

Fra figuren i oppgaveteksten ser vi dessuten at

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \Delta s \cos\theta \\ x_1 - x_2 = \Delta x &= \Delta s \sin\theta \end{aligned}$$

Det betyr at

$$\Delta t = \Delta t' - \frac{\Delta s \cos\theta}{c}$$

og dermed at

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta s \sin\theta}{\Delta t' - \Delta s \cos\theta/c} = \frac{(\Delta s/\Delta t')\sin\theta}{1 - (\Delta s/\Delta t')\cos\theta/c} = \frac{v\sin\theta}{1 - (v/c)\cos\theta}$$

Maksimal tilsynelatende hastighet u (for gitt v) finner vi ved å sette $du/d\theta = 0$:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{v\cos\theta(1 - (v/c)\cos\theta) - v\sin\theta(v/c)\sin\theta}{(1 - (v/c)\cos\theta)^2} = 0$$

dvs

$$v\cos\theta - \frac{v^2}{c}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 0$$

dvs

$$\cos\theta_{\max} = \frac{v}{c}$$

Innsatt i uttrykket for u, sammen med $\sin\theta = \sqrt{1 - v^2/c^2}$, har vi

$$u(\theta_{\max}) = \frac{v\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)(v/c)} = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Vi ser uten videre at $u(\theta_{\max}) > v$. Dessuten har vi $u = c$ når

$$c = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dvs

$$v = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

For v større enn dette blir $u(\theta_{\max})$ større enn lyshastigheten. (Det er selvsagt ikke noe mystisk ved det, ettersom u bare er en tilsynelatende hastighet.)