Institutt for fysikk, NTNU
FY1002/TFY4160 Bølgefysikk
Høst 2006

Midtsemesterprøve Bølgefysikk
Torsdag 12. oktober 2006 kl 1215 – 1400.

Løsningsforslag

Tillatte hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling. (Eller tilsvarende.)
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk eller B. E. Lian og C. Angell: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)
- Formelsamling i bølgefysikk er inkludert på baksiden av dette arket.

Opplysninger:

- Prøven består av 25 oppgaver. Hver oppgave har ett riktig og tre gale svaralternativ.
- Du *skal* krysse av for *ett* svaralternativ på *hver* oppgave. Avkryssing for *mer enn ett* alternativ eller *ingen* alternativ betraktes som *feil* svar og gir i begge tilfelle null poeng.
- Noen verdier: Tyngdens akselerasjon: $g = 9.8$ m/s^2, Lyshastigheten i vakuum: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, Boltzmanns konstant: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K, Avogadros tall: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$, Protonmassen: $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg.
- Symboler angis i kursiv (f.eks m for masse) mens enheter angis uten kursiv (f.eks m for meter). Vektorer angis med fete symboler. Enhetsvektorer angis med hatt over.
- SI-prefikser: G (giga) = 10^9, M (mega) = 10^6, k (kilo) = 10^3, c (centi) = 10^{-2}, m (milli) = 10^{-3}, μ (mikro) = 10^{-6}, n (nano) = 10^{-9}, p (piko) = 10^{-12}.
- Trigonometriske relasjoner:

$$A \sin(\alpha - \beta) + B \sin(\alpha + \beta) = (A + B) \sin \alpha \cos \beta - (A - B) \cos \alpha \sin \beta$$

Oppgaver

---

1) En kloss er festet til ei fjær og utfører udempede harmoniske svingninger med vinkelfrekvens ω. Ved et bestemt tidspunkt er fjæra strukket en lengde x_0 og klossens hastighet er da v_0. Hva er klossens maksimale hastighet?

C $\quad v_0\sqrt{1+(\omega x_0/v_0)^2}$

Kan løses på flere måter, f.eks. ved energibetraktning: Total energi ved angitt tidspunkt:

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Når klossen passerer likevektsposisjonen, er potensiell energi lik null, og dermed

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$$

som gir

$$v_{\text{max}}^2 = \omega^2 x_0^2 + v_0^2$$

---

2) En kloss med masse m er festet til ei fjær med fjærkonstant k og utfører dempede svingninger. Friksjonskraften er $b \cdot v$, der v er klossens hastighet og b er en dempingskonstant. Systemets godhetsfaktor er $Q = \sqrt{k \cdot m}/b$. Hva blir da godhetsfaktoren for en elektrisk krets bestående av en motstand R, en kapasitans C og en induktans L koblet i serie?
Oppgitt (q = ladning, I = strøm):

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

A $\quad Q = \sqrt{L/R^2C}$

Den oppgitte ligningen,

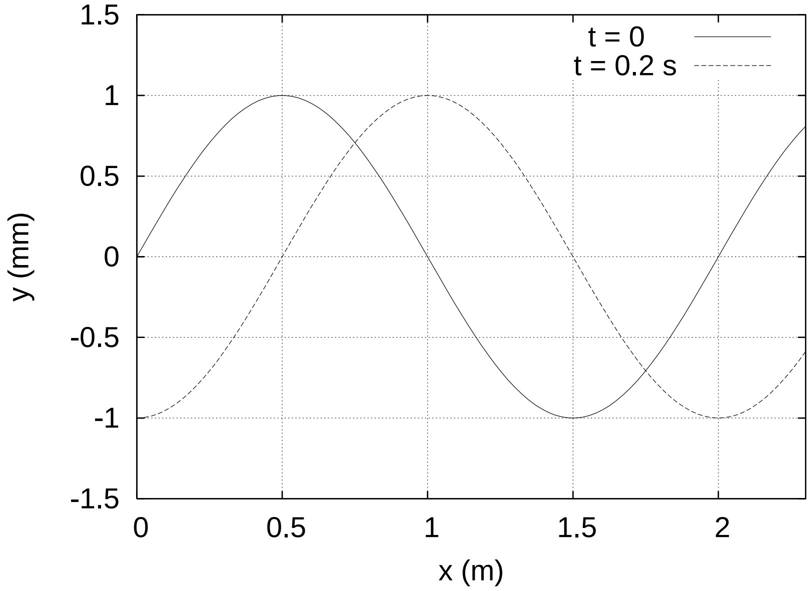
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

er på eksakt samme form som bevegelsesligningen for klossen,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Følgelig er m og L, b og R, og k og $1/C$ analoge størrelser i de to systemene, slik at godhetsfaktoren må bli $Q = \sqrt{L/R^2C}$.

Figur 1:



Figur 1 gjelder oppgavene 3-8 og viser to øyeblikksbilder av (en del av) en harmonisk transversal bølge som forplanter seg i positiv x-retning på en streng.

---

3) Hva er bølgens amplitude?

A 1.0 mm

---

4) Hva er bølgens bølgelengde?

D 2.0 m

---

5) Hva er bølgehastigheten?

D 2.5 m/s

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.5\,\mathrm{m}}{0.2\,\mathrm{s}} = 2.5\,\mathrm{m/s}$$

Den kunne forsåvidt også ha vært f.eks. 2.5 m/0.2 s = 12.5 m/s ut fra figuren, men dette var jo ikke noe svaralternativ.

---

6) Hva er frekvensen?

A 1.25 Hz

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{2.5\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{m}} = 1.25\,\mathrm{Hz}$$

---

7) Hva er strengelementenes maksimale hastighet?

C 7.9 mm/s

$$\begin{aligned} y &= y_0 \sin(kx - \omega t) \\ \Rightarrow \dot{y} &= -\omega y_0 \cos(kx - \omega t) \\ \Rightarrow \dot{y}_{\mathrm{max}} &= \omega y_0 = 2\pi \cdot 1.25 \cdot 0.001 \simeq 7.9\,\mathrm{mm/s} \end{aligned}$$

---

8) Bølgen kan beskrives ved funksjonen $y_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$. Hva er da fasekonstanten ϕ?

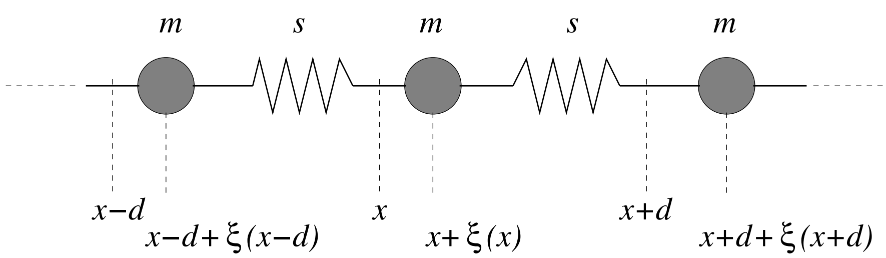
C $\phi = \pi/2$

Vi ser fra figuren at

$$y(0,0) = 0 = y_0 \cos\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

Ettersom $y(0.5, 0) = 1 = y_0 \cos(\pi/2 + \phi) = y_0 \cos(\pi/2 + \pi/2) = -y_0$, kan det se ut som om ϕ må være $-\pi/2$, men y_0 kan jo godt være lik -1 mm, slik at $\phi = +\pi/2$ (også) er i orden.

Figur 2:



Figur 2 gjelder oppgavene 9-11 og viser et utsnitt av en uendelig lang kjede med masser m, bundet til sine nærmeste nabomasser med masseløse fjærer med fjærkonstant s. Posisjonene $x-d$, x og $x+d$ angir likevektsposisjoner for de tre massene som er vist i figuren. Utsvinget fra likevekt for massen med likevektsposisjon x betegnes $\xi(x,t)$ der t angir tiden. (Positivt utsving for en masse er mot høyre, dvs i positiv x-retning.) Vi antar at en harmonisk longitudinal bølge $\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ forplanter seg langs kjeden.

---

9) Bevegelsesligningen for massen m med likevektsposisjon x er

A $m\ddot{\xi}(x,t) = s\,[\xi(x+d,t) - 2\xi(x,t) + \xi(x-d,t)]$

Netto strekk i fjæra til venstre for m (ved x):

$$\xi(x) - \xi(x-d)$$

der positivt netto strekk vil gi kraft på m mot venstre.
Netto strekk i fjæra til høyre for m:

$$\xi(x+d) - \xi(x)$$

der positivt netto strekk vil gi kraft på m mot høyre.
Netto kraft på m mot høyre blir dermed

$$-s\left[\xi(x) - \xi(x-d)\right] + s\left[\xi(x+d) - \xi(x)\right] = s\left[\xi(x+d) - 2\xi(x) + \xi(x-d)\right]$$

---

10) Dispersjonsrelasjonen for dette systemet er

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4s}{m}}\sin\frac{kd}{2}$$

Hva er maksimal fasehastighet?

B $\sqrt{sd^2/m}$

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{4s}{m}}\frac{\sin(kd/2)}{k} = \sqrt{\frac{4s}{m}} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin(kd/2)}{kd/2}$$

Funksjonen $\sin x/x$ er maksimal og lik 1 når $x \to 0$. Dermed:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{sd^2}{m}}$$

---

11) Hva er gruppehastigheten når bølgelengden er $2d$?

A null

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{4s}{m}} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos(kd/2)$$

Hvis $\lambda = 2d$, er $k = 2\pi/\lambda = \pi/d$ og $\cos(kd/2) = \cos(\pi/2) = 0$, og følgelig også $v_g = 0$.

---

12) Gull har massetetthet 19320 kg/m^3 og elastisitetsmodul (eventuelt Youngs modul) 78.5 GPa. Hva er da lydhastigheten i en tynn stang av gull?

C 2016 m/s

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{78.5 \cdot 10^9}{19320}} \simeq 2016\,\mathrm{m/s}$$

---

13) En sommerdag stiger plutselig temperaturen fra 300 K til 303 K. Hvor mye endres da lydhastigheten?

C $+0.5$ %

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} = a \cdot T^{1/2} \\
\Rightarrow \Delta v &= a \cdot \frac{1}{2} T^{-1/2} \cdot \Delta T = v \cdot \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} \\
\Rightarrow \frac{\Delta v}{v} &= \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} = \frac{3}{2 \cdot 300} = \frac{0.5}{100} = 0.5\%
\end{aligned}
$$

14) I en gass farer molekylene tilfeldig hit og dit med en midlere hastighet v_T, bestemt ved at molekylenes kinetiske energi tilsvarer (omtrent) den termiske energien $k_B T$. Lydhastigheten v i gassen er da

B av samme størrelsesorden som v_T.

Molekylenes midlere kinetiske energi:

$$\frac{1}{2} m v_T^2 \sim k_B T$$

der faktoren 3/2 på høyre side er uten betydning, all den tid vi snakker om størrelsesordner. Dette gir

$$v_T \sim \sqrt{k_B T / m}$$

For lydhastigheten har vi

$$v = \sqrt{\gamma k_B T / m} \sim \sqrt{k_B T / m}$$

dvs

$$v \sim v_T$$

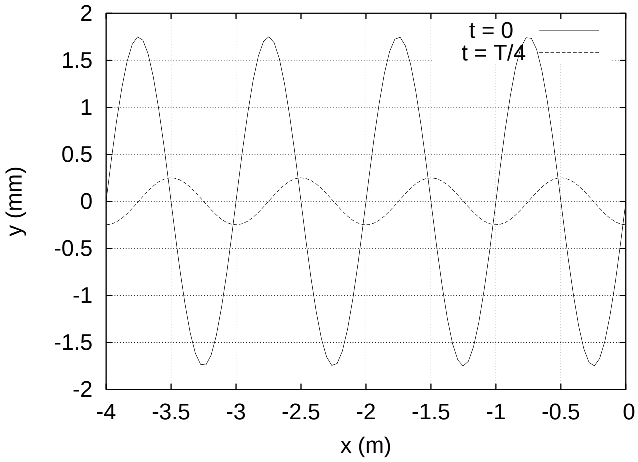
15) En liten høyttaler sender ut lydbølger med like stor intensitet i alle retninger. Dersom du måler et intensitetsnivå på 75 dB i en avstand 20 m fra høyttaleren, hva er da intensitetsnivået 5 m fra høyttaleren?

B 87 dB

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A} \sim \frac{1}{r^2} \\
\Rightarrow \frac{I(5)}{I(20)} &= \left(\frac{20}{5}\right)^2 = 16 \\
75 &= 10 \log \frac{I(20)}{I_0} \\
\Rightarrow I(20) &= I_0 10^{7.5} \\
\Rightarrow I(5) &= 16 I_0 10^{7.5} \\
\Rightarrow \beta &= 10 \log \frac{16 I_0 10^{7.5}}{I_0} = 75 + 10 \log 16 = 75 + 12 = 87\,\mathrm{dB}
\end{aligned}
$$

16) Figuren til høyre viser to øyeblikksbilder, ved $t = 0$ og etter en kvart periode, av en transversal harmonisk bølge på en streng. I $x = 0$ er strengen skjøtt sammen med en streng med større massetetthet, og bølgen som kommer inn fra venstre, $y_{i0}\sin(kx - \omega t)$, blir dermed delvis reflektert ($y_{r0}\sin(kx + \omega t)$) og delvis transmittert i $x = 0$. Bruk figuren til å bestemme hvor stor del av den innkommende bølgens energi som i middel blir transmittert (dvs: som propagerer videre forbi $x = 0$).

B ca 44 %



Totalt utsving på strengen for $x < 0$:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_{i0}\sin(kx-\omega t) + y_{r0}\sin(kx+\omega t) \\ &= y_{i0}\left[\sin(kx-\omega t) + r\sin(kx+\omega t)\right] \\ &= y_{i0}\left[(1+r)\sin kx\cos\omega t - (1-r)\cos kx\sin\omega t\right] \end{aligned}$$

der vi har innført r for $(\sqrt{\mu_2}-\sqrt{\mu_1})/(\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1})$ (se formelsamlingen) og benyttet den trigonometriske relasjonen oppgitt på side 1. Andelen reflektert energi er gitt ved $R = r^2$, hvoretter vi finner andelen transmittert energi fra $T = 1 - R = 1 - r^2$. Vi bruker figuren til å bestemme (eller i hvert fall anslå) r:

$$y(-0.75\,\mathrm{m}, 0) \simeq 1.75\,\mathrm{mm}$$

og

$$y(-0.50\,\mathrm{m}, T/4) \simeq 0.25\,\mathrm{mm}$$

Vi ser videre at $\lambda = 1$ m, som gir $k = 2\pi$ m^{-1}. Dermed:

$$\begin{aligned} 1.75 &= y_{i0}(1+r)\sin(2\pi\cdot(-0.75)) = y_{i0}(1+r) \\ 0.25 &= -y_{i0}(1-r)\cos(2\pi\cdot(-0.50)) = y_{i0}(1-r) \\ \Rightarrow 0.25(1+r) &= 1.75(1-r) \\ \Rightarrow r &= 0.75 \\ \Rightarrow R &\simeq 0.56 \\ \Rightarrow T &\simeq 0.44 = 44\% \end{aligned}$$

---

17) Bølgen

$$\boldsymbol{D}(x,t) = D_0\hat{y}\sin(kx-\omega t) - D_0\hat{z}\sin(kx-\omega t)$$

er

B   lineærpolarisert.

Vi ser at y-komponenten av $\boldsymbol{D}(x,t)$ er motsatt lik z-komponenten av $\boldsymbol{D}(x,t)$ for alle posisjoner x og tider t. Følgelig ligger utsvinget langs linjen $z = -y$, som er en rett linje i yz-planet. Bølgen er altså transversal og lineærpolarisert.

---

18) En gitarstreng med lengde 70 cm er festet i begge ender. Strekket i strengen er 120 N og massen er 7.9 g. Hva er frekvensen til strengens 3. harmoniske (dvs 3. laveste egenfrekvens)?

A   221 Hz

Grunntonen har bølgelengde $\lambda_1 = 2L$, 2. harmoniske $\lambda_2 = L$ og 3. harmoniske $\lambda_3 = 2L/3$. Bølgehastigheten på strengen er

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S \cdot L}{m}} = \sqrt{\frac{120 \cdot 0.70}{0.0079}} \simeq 103.1\,\mathrm{m/s}$$

Frekvensen til 3. harmoniske blir dermed

$$\nu_3 = \frac{v}{\lambda_3} = \frac{3v}{2L} \simeq 221\,\mathrm{Hz}$$

---

19) To biler kjører rett mot hverandre, bil nr 1 med hastighet 40 m/s og bil nr 2 med hastighet 20 m/s. Begge bilene er utstyrt med en sirene som genererer en harmonisk lydbølge med frekvens 900 Hz. Det er vindstille, og været er ellers slik at lydhastigheten denne dagen er $v = 340$ m/s. Hvilken frekvens ν_1 måler bil nr 1 fra sirenen i bil nr 2, og hvilken frekvens ν_2 måler bil nr 2 fra sirenen i bil nr 1?

C $\nu_1 = 1069$ Hz og $\nu_2 = 1080$ Hz

Med bil nr 1 som observatør og sirenen i bil nr 2 som kilde:

$$\nu_1 = \frac{1 + 40/340}{1 - 20/340} \cdot 900\,\mathrm{Hz} = 1069\,\mathrm{Hz}$$

Med bil nr 2 som observatør og sirenen i bil nr 1 som kilde:

$$\nu_2 = \frac{1 + 20/340}{1 - 40/340} \cdot 900\,\mathrm{Hz} = 1080\,\mathrm{Hz}$$

---

20) Et uvær i Nordsjøen genererer østgående dønninger med bølgelengde 100 m. Bølgene beskrives av dispersjonsrelasjonen $\omega(k) = \sqrt{gk}$, der g er tyngdens akselerasjon og k er bølgetallet. Hvor lang tid tar det før dønningene når fram til Røst, 60 km lenger øst?

A   ca 2 timer og 40 minutter

Bølgetoget går østover med hastighet lik gruppehastigheten:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{g}{4k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{8\pi}} \simeq 6.24\,\text{m/s}$$

For å tilbakelegge distansen 60000 m bruker bølgene dermed en tid

$$t = \frac{60000}{6.24}\,\text{s} \simeq 9609\,\text{s} \simeq 2\,\frac{2}{3}\,\text{timer} \simeq 2\,\text{timer}40\,\text{minutter}$$

---

21) Sjokkbølgen fra et jagerfly som flyr horisontalt treffer deg 5.4 s etter at flyet passerte rett over deg. Lydhastigheten er 340 m/s, og flyets hastighet er 1.8 ganger så stor (dvs machtall = 1.8). I hvilken høyde flyr flyet?

C ca 2.2 km

Når sjokkbølgen treffer deg, danner linjen mellom deg og flyet en vinkel α gitt ved $\sin\alpha = v/v_s = 1/1.8$, dvs $\alpha \simeq 33.75^\circ$. På denne tiden (dvs $t = 5.4$ s) har flyet tilbakelagt avstanden $v_s t = 1.8vt$ slik at $\tan\alpha = h/1.8vt$, dvs

$$h = 1.8vt\tan\alpha \simeq 1.8 \cdot 340 \cdot 5.4 \cdot \tan 33.75^\circ \simeq 2.2\,\text{km}$$

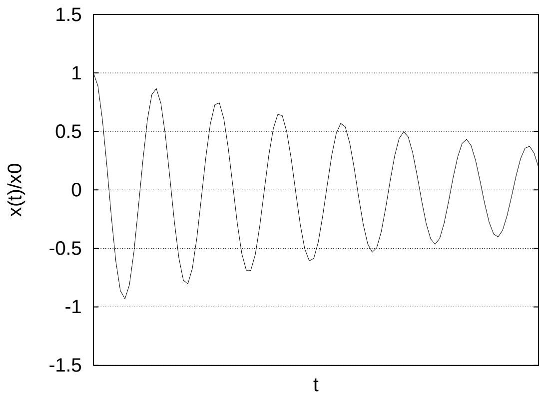
---

22) Figuren viser utsvinget

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau}\cos\omega t,$$

eller rettere sagt $x(t)/x_0$, for en dempet harmonisk svingning. Omtrent hvor stort er produktet $\omega\tau$ mellom vinkelfrekvensen og den "karakteristiske tiden" for dempingsforløpet?

D 45



Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0.5$, der T er svingningens periode. Dermed:

$$\begin{aligned} e^{-5T/\tau} &= e^{-5\cdot 2\pi/\omega\tau} = 0.5 \\ \Rightarrow \frac{10\pi}{\omega\tau} &= \ln 2 \\ \Rightarrow \omega\tau &= 45 \end{aligned}$$

---

23) Et langt, tynt rør som er åpent i den ene enden og lukket i den andre skal brukes til å lage stående lydbølger med frekvens 50 Hz. Dette skal være rørets laveste resonansfrekvens (grunntonen). Hvor langt må da røret være? Lydhastigheten er 340 m/s.

B 170 cm

Grensebetingelsene som bestemmer bølgelengden til mulige stående bølger i et slik rør er at utsvinget ξ skal ha et knutepunkt i eventuelle lukkede ender og en buk i eventuelle åpne ender. (Alternativt: Trykkbølgen har knutepunkt i åpen ende og buk i lukket ende.) Uansett hvordan vi ønsker å tenke, finner vi at grunntonen tilsvarer en kvart bølgelengde inne i røret, dvs $\lambda_1 = 4L$. Dermed:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4L = \frac{v}{\nu_1} = \frac{340}{50} \\ \Rightarrow L &= \frac{340}{200}\,\mathrm{m} = 170\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

---

24) Hva blir nest laveste resonansfrekvens i røret i oppgave 23?

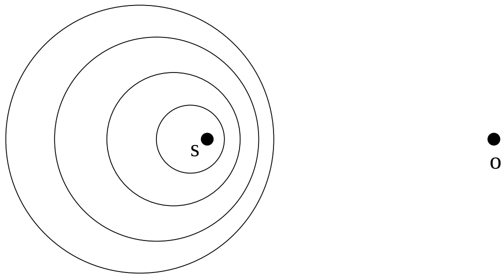
C 150 Hz

Nest laveste resonansfrekvens i et slik rør tilsvarer at vi har 3 kvarte bølgelengder inne i røret. Følgelig er bølgelengden nå 1/3 av grunntonens bølgelengde, som betyr at frekvensen er 3 ganger så stor, dvs 150 Hz.

---

25) Figuren viser en lydkilde (s) som sender ut lydbølger med en bestemt frekvens. De fire sirklene angir posisjoner for fire påfølgende bølgetopper. Hva er kildens hastighet v_s, inklusive retning, i forhold til lydhastigheten v?

B $v_s = v/2$, mot o.



Bølgelengden blir redusert *foran* kilden når denne beveger seg fordi en ny bølgetopp (f.eks.) genereres nærmere den forrige i forhold til om kilden var i ro. Altså beveger kilden seg her mot observatøren. Vi ser videre at kilden har beveget seg omtrent halvparten så langt som (f.eks.) bølgefronten med størst radius (som jo må ha blitt generert da kilden var i sentrum av denne). Altså er $v_s \simeq v/2$.

Institutt for fysikk
NTNU

FY1002/TFY4160 Bølgefysikk

Midtsemesterprøve torsdag 12. oktober 2006 kl 1215 – 1400.

Fasit

Oppgave	A	B	C	D
1			x	
2	x			
3	x			
4				x
5				x
6	x			
7			x	
8			x	
9	x			
10		x		
11	x			
12			x	
13			x	

Oppgave	A	B	C	D
14		x		
15		x		
16		x		
17		x		
18	x			
19			x	
20	x			
21			x	
22				x
23		x		
24			x	
25		x		