

Kinetisk og potensial energi^{to}
for enkel harmonisk oscillator
uten ytre felt.

Kinetisk energi:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Potensial energi:

$$\begin{aligned} E_p &= - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_0^x F \cdot dx' \\ &\quad \text{over veien} \\ &\quad x=0 \Rightarrow E_p=0 \\ &= - \int_0^x (-kx') dx' \\ &= \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

Total energi:

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \alpha) \\ &\quad + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \alpha) \\ &= \frac{1}{2} k A^2 \end{aligned}$$

Altså:

① Total energien er bevaret /
spærkraften er altså konserverende.

$$F = - \frac{dE_p}{dx}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

↑
uafhængig af vejen S.

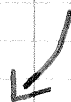
{ dette er et
potensial-
et fkt.

② E er proportional med A^2 .

③ Liden $x = A \cos(\omega t + \alpha)$

og $v = -\omega A \sin(\omega t + \alpha),$

har vi at $x_{\max} = A$ og
 $v_{\max} = \omega A.$

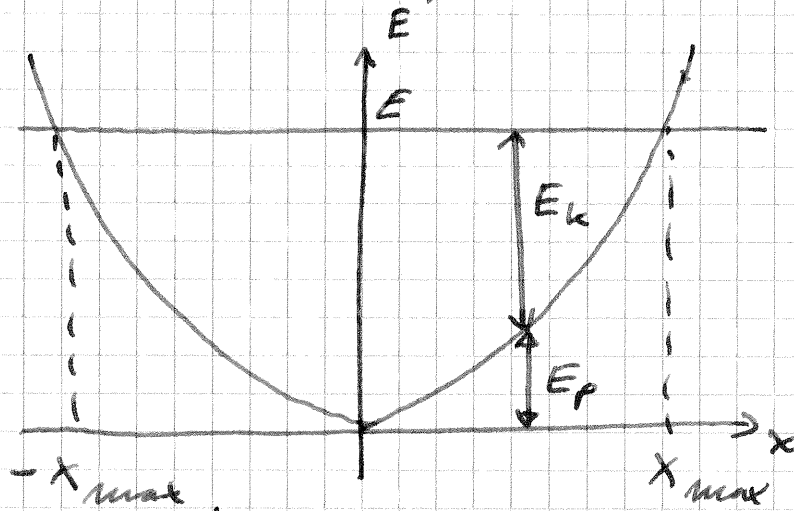


Eliminerer A i
 udtrykket for energien:

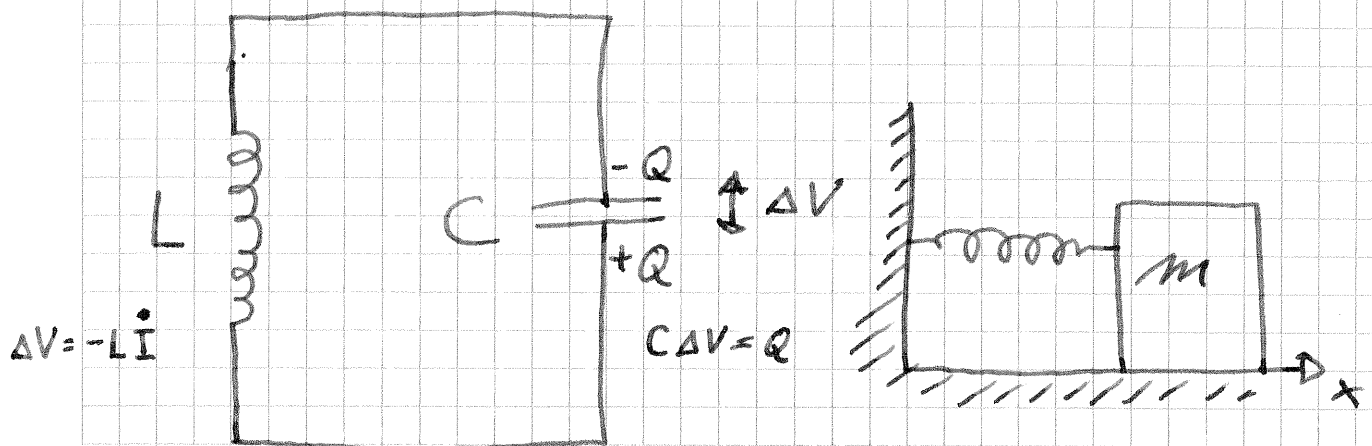
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k x_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} k \left(\frac{v_{\max}}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{k}{\omega^2}}_{=m} v_{\max}^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_{\max}^2. \end{aligned}$$

Total energien er altså lig
 maksimal potentiell energi og
 maksimal kinetisk energi.

Når oscillatoren vækkes ved en energi med et gorkemål og kvadratisk energi:



Elektrisk analogi



Elektrisk

mekanisk

L

m

$\frac{1}{C}$

k

Q

x

$I = \frac{dQ}{dt}$

$v = \frac{dx}{dt}$

$$\begin{aligned}
 -L\dot{I} &= \frac{Q}{C} = \Delta V \\
 \dot{I} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ}{dt} \right) = \frac{d^2Q}{dt^2}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} -L\dot{I} &= \frac{Q}{C} = \Delta V \\ \dot{I} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dQ}{dt} \right) = \frac{d^2Q}{dt^2} \end{aligned}} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q &= 0 \\ \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q &= 0 \end{aligned}$$

Same equation as

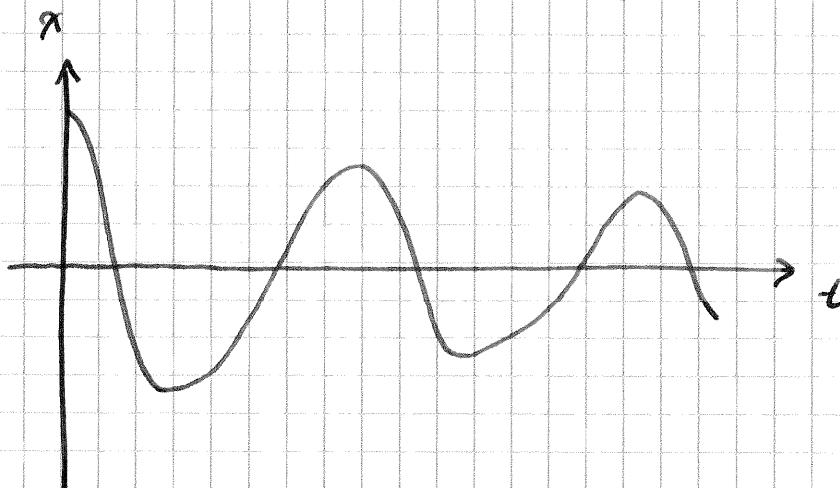
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

$\Rightarrow$ Same solution

$$Q = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Damped oscillations



Freispori demper bevegelsen.

Bevægelse med løsnig

Typisk: Dæmpningskraften
proportional med hastigheden.

$$F_d = -bv = -b \frac{dx}{dt}$$

↑ konstant.

↙ dæmpningskraften

Newtons 2. lov:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

↑ fjælkraft ↖ dæmpningskraft.

Altså

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + b \frac{dx}{dt} = 0$$

Impræi $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

Ligningen blir da

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Homogen 2.ordens differentialligning med konstante koeffisienter.

Numerisk løsning: Skriv om til 2. 1.ordens ligninger:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\delta v + \omega_0^2 x = 0$$

Diskretiser tiden: $t \rightarrow t_k = k \cdot \Delta t$

$$x(t) \rightarrow x_k$$

$$v(t) \rightarrow v_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t \cdot v_k$$

$$v_{k+1} = v_k - \Delta t \{ 2\delta v_k + \omega_0^2 x_k \}$$

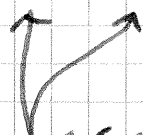
$x \rightarrow 0$ når $t \rightarrow \infty$.

Maksimalt én forsving af $x=0 \Rightarrow$ overdæmpet.

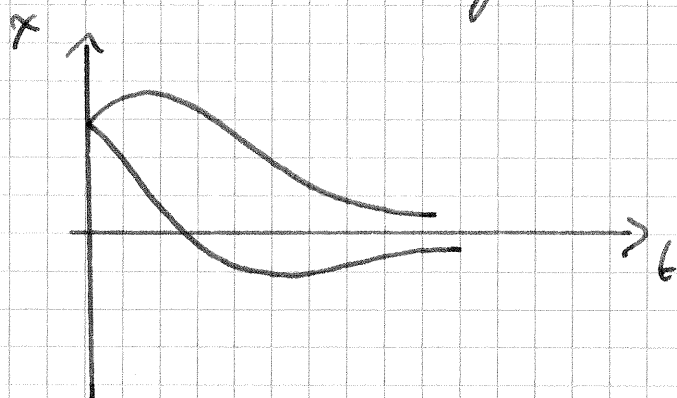
Fra de ustabilitetsgrænserne for verdierne som
indgrænsningskonstantene A og B kan
ha, både positive og negative
verdier.

② $\delta = \omega_0$: KRITISK DÆMPET

$$x = (A + Bt)e^{-\delta t}$$



Vilkårlige indgrænsningskonstanter.



(3) $\delta < \omega_0$: UNDERDAMPET

19

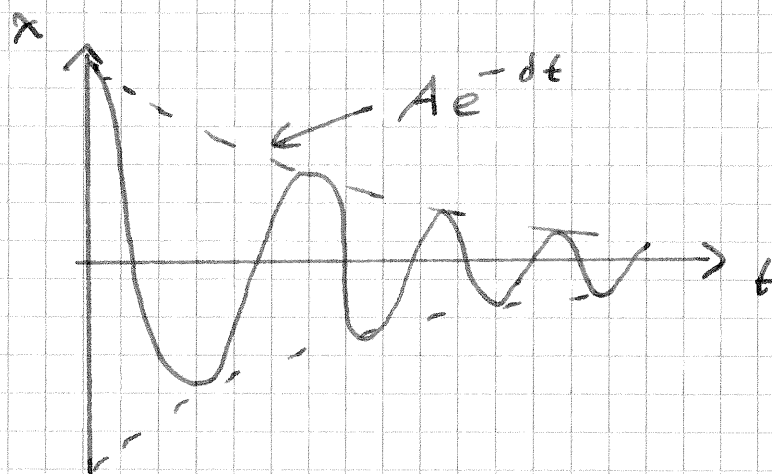
Generell lösning:

$$x = A e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \alpha)$$

↑
!

A og α er vilkårlige integrationskonstanter.

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$



Støtdempere konstrueres slik at de er tilnærmet kritisk dempet. Når de slikes, blir de underdempet.

Energi i dempet svingning - Godhetsfaktør

Ser man på det underdempede
 tilfælde: $\delta < \omega_0$.

Løsning af svingligningen.

$$x = A e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \alpha).$$

Hvis gang svingligningen er i et så lille
 ydelsespunkt, vil den energi være
 rent mekanisk:

$$\begin{aligned}
 E(t) = E_p(t) &= \frac{1}{2} k x_{\max}^2(t) \\
 &= \frac{1}{2} k A^2 e^{-2\delta t}
 \end{aligned}$$

En periode $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ senere er
 energien

$$E(t + \frac{2\pi}{\omega_d}) = \frac{1}{2} A^2 e^{-2\delta(t + \frac{2\pi}{\omega_d})} \quad 2/$$

Relativt energitaps per periode:

$$\frac{E(t) - E(t + \frac{2\pi}{\omega_d})}{E(t)} = \frac{e^{-2\delta t} - e^{-2\delta(t + \frac{2\pi}{\omega_d})}}{e^{-2\delta t}}$$

$$= 1 - e^{-\frac{4\pi\delta}{\omega_d}} = \frac{\Delta E(t)}{E(t)}$$

Avhengig av tiden.

Betrakt nå tilfellet når

$$\delta \ll \omega_0.$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \simeq \omega_0$$

Relativt energitaps:

$$\frac{\Delta E(t)}{E(t)} = 1 - e^{-\frac{4\pi\delta}{\omega_0}}$$

$$\simeq 1 - (1 - \frac{4\pi\delta}{\omega_0}) = \frac{4\pi\delta}{\omega_0} = 2\pi \frac{\gamma}{m\omega_0}$$

$\uparrow$
 $\delta = \frac{\gamma}{2m}.$

$$\text{Gordhelsfaktor } Q = \frac{m\omega_0}{\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\delta} \quad 22$$

Relativt energitap per periode:

$$\frac{\Delta E(t)}{E(t)} = \frac{2\pi}{Q}$$

$\uparrow$

Jö större Q , jö mindre energitap.
