

Uledning av bølge ligning for elektromagnetiske felt i vakuum.

(Ikke i A&F)

Vi antar nå at vi har vakuum uten ladning eller strøm.

Bølge ligningen vi skal utlede blir derfor med god tilnærming bare gyldig for de deler av rommet som elektromagnetiske felt kan betraktes som vakuum - f. eks. luft.

Maxwells ligninger er da:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

(1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(2)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(3)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

(4)

Fra Kottmann, Matematikk

Formelsammlung:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}, \quad (5)$$

hier

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \equiv \Delta \quad (6)$$

er Laplace-Operatoren.

Wir verwenden nun (5) für (3):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

||

$$\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\rightarrow = 0} - \nabla^2 \vec{E} = - \nabla^2 \vec{E} \quad (4)$$

(1)

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Also:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}} \quad (7)$$

hvor
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$= 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Dette er bølge-ligningen for EM felter i vakuum.

Vi får på samme måte:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$= \vec{\nabla} \times (\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}$$

Altså

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} \quad (8)$$

hvor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon}}$$

Alltså, vil motsvarande elektromagnetiska fält $\vec{E}$ og $\vec{B}$ (varierande betygs $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$ og $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$) i vakuum forplantas sig som vågor utan dispersion.

(Det är imidlertid ikke nok at $\vec{E}$ og $\vec{B}$ oppfyller de to vågelikningene. $\vec{E}$ og $\vec{B}$ må i tillegg oppfylle Maxwell's 4. ligninger.

Eksempel med harmoniske planbølger
(A&F 29.2)

Planbølgen gitt ved

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_B)$$

med $\omega = c|\vec{k}| = ck$, $n \cdot c$

et mulig sett med løsninger av
bølge ligningene (7) og (8).

Vi finner nå divergensen til $\vec{E}$ -feltet:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E) \\ &= \vec{E}_0 \cdot \left\{ \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ &\quad \cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_E) \\ &= -\vec{E}_0 \cdot (k_x \vec{i}_x + k_y \vec{i}_y + k_z \vec{i}_z) \\ &\quad \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E) \\ &= -\vec{E}_0 \cdot \vec{k} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E) = 0\end{aligned}$$

for alle $\vec{r}$ og t .

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{k} \perp \vec{E}_0}$$

$$\boxed{\vec{k} \perp \vec{E}}$$

På samme vis finner vi

$$\boxed{\vec{k} \perp \vec{B}}$$

EM-bølgen er transversale.

Vi finner videre

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{i}_z \right)$$

$$\cos(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t + \varphi_E) \times \vec{E}_0$$

$$= - (k_x \vec{i}_x + k_y \vec{i}_y + k_z \vec{i}_z) \times \vec{E}_0$$

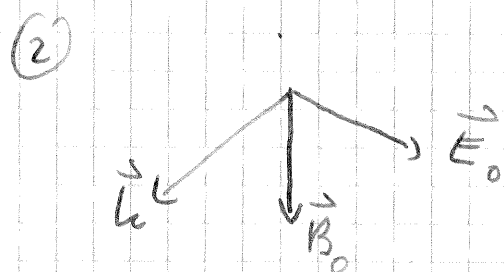
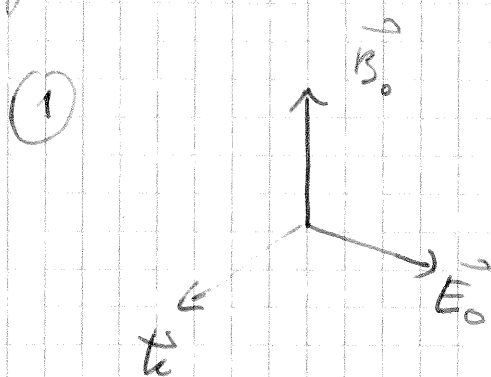
$$\sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E) \quad (8)$$

$$= -\vec{k} \times \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E) \quad \uparrow \quad = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E) \quad (3)$$

Dermed ikke $\vec{k}$ eller $\vec{E}_0$ er like null
(noe som ville bety ingen bølge),

ser vi at $\vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$ og fra for $\vec{B}_0 \perp \vec{k}$.

Vi har da to muligheter for
retningen av $\vec{B}_0$ i forhold til $\vec{E}_0$
og $\vec{k}$:



Vi velger den første (den andre
vil gi samme resultat for

relasjonen mellom $\vec{k}$, $\vec{E}$ og $\vec{B}$ men
 ikke mellom $\vec{k}$, $\vec{E}_0$ og $\vec{B}_0$, men
 $\varphi_B = \varphi_E$ blir også forstjellig og
 komplanere.

På grunn av at $\vec{k} \perp \vec{E}_0$ får vi
 da fra (8)

$$\begin{aligned} k E_0 \frac{\vec{B}_0}{B_0} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_E) \\ = \omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_B) \end{aligned} \quad (9)$$

(9) er bare gyldig for alle $\vec{r}$ og t

$$\text{dersom} \quad \varphi_B = \varphi_E \quad (10)$$

Ligning (8) blir da

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \quad (11)$$

og dedert ved hjelp av det harmoniske
uttrykket for $\vec{E}$ og $\vec{B}$, finner vi

$$\boxed{\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}} \quad (12)$$

Altså har vi funnet for en
plan harmonisk elektromagnetisk
bølge i vakuum:

$\vec{k}$, $\vec{E}$ og $\vec{B}$ står normalt
på hverandre for det
vis som er gitt i (12).

For allverdier for vi fra (12):

$$\boxed{E = \frac{\omega}{k} B = c B} \quad (13)$$

Bemerkninger:

- 1) Den rest av Maxwells 4 ligninger reproducerer bare (12)
 (fordi $\vec{E}$ og $\vec{B}$ oppfyller bølgeligningene for dem er basert på Maxwells ligninger.)

2)
$$\vec{E} = \vec{E}_1(x-ct) + \vec{E}_2(x+ct) \quad (14)$$

og

$$\vec{B} = \vec{B}_1(x-ct) + \vec{B}_2(x+ct) \quad (15)$$

er også løsninger av

bølgeligningene.

- 3) $\vec{E}$ og $\vec{B}$ må i tillegg oppfylle Maxwells ligninger.

Polarisering

Bølgen vi har studert er
lineært polarisert som i

$$A \& F \text{ 29.2 } (A \& F: \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_2 \text{ og } \vec{E} = E \vec{e}_3).$$

Dermed $\vec{E}_0$ er vertikal (horisontal)
kalles bølgen vertikal (horisontal)
polarisert.

Som for mekaniske svingninger
på streng, kan vi for elektro-
magnetiske bølger ha lineær
polarisert, sirkulær polarisert
og ikke-polarisert bølger
og blandingen av disse.

(For eksempel en elliptisk polarisering
blandning av linär og cirkulär
polarisering).

En cirkulært polarisert lys
rotter $\vec{E}$ -vektoren med
konstant amplitude og
 $\vec{B}$ -vektoren (også med konstant
amplitude) 40° per forløp
for $\vec{E}$ -vektoren.

Se figuren ~~øverst på side 11~~

$\Delta \& F$ 29.3. Se også $A \& F$ fig. 29.4
for sfæriske bølger.

Energi og impuls til EM-bølger

Energi:

Vi har $\vec{I} = v \cdot \vec{E}$

energi tæthet i
 et elektrisk felt mellem
 to parallelle plader, f.eks.
 i en kondensator.

Vi har fra A & F, ligning (25.40)
 og (26.25) respektive energitæthet
 for elektrisk og magnetisk felt:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2} \quad (1)$$

hvor

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2}$$

Vi betrakta en harmonisk plan-
våg

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$$

För den totala energi tetheten
medelt över en period har
vi då

$$\overline{E_{\text{tot}}} = \overline{E_e} + \overline{E_m} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \overline{E^2} + \frac{1}{2\mu_0} \overline{B^2}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \overline{E^2} + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \overline{E^2} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \overline{E^2}$$

$$E = cB$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$= \epsilon_0 \overline{E^2}$$

Dermed har vi intensiteten:

15

$$I = c \epsilon_0 \overline{E^2}$$

Poyntings vektor

I forbindelse med intensitet
i elektromagnetiske stråling
er det væsentlig i nytte

Poyntings vektor $\vec{S}$, som i

vakuum er defineret ved

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Vi betragter harmoniske plan bølger

som ovenn på side 14.

Vi har $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$

Siden $\varphi_B = \varphi_E$, har vi videre

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

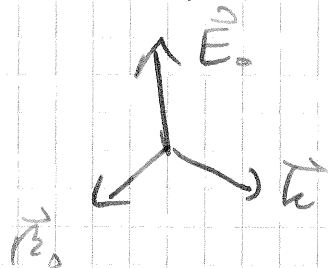
og for alle verdier

$$E_0 = \frac{\omega}{k} B_0 = c B_0$$

For $\vec{S}$ får vi da

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$= \frac{c}{h} \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$



$$= \frac{t_0}{t_0} \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c} \underbrace{c^2 \epsilon_0 \mu_0}_{=1} \cos^2(t_0 \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$= \frac{t_0}{t_0} c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(t_0 \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$= \frac{t_0}{t_0} c \epsilon_0 E^2$$

For vi middelværdien over en periode får vi

$$\boxed{\bar{S} = \frac{t_0}{t_0} c \epsilon_0 \bar{E}^2 = \frac{t_0}{t_0} I}$$

Altså: Tidsmiddelværdien over en periode for en plan harmonisk bølge, har tilsvarende bølgens intensitet og sekundær bølgens forplantningsretning.