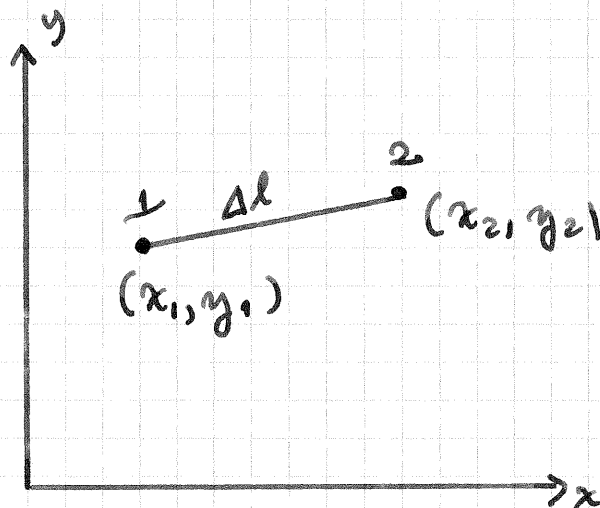


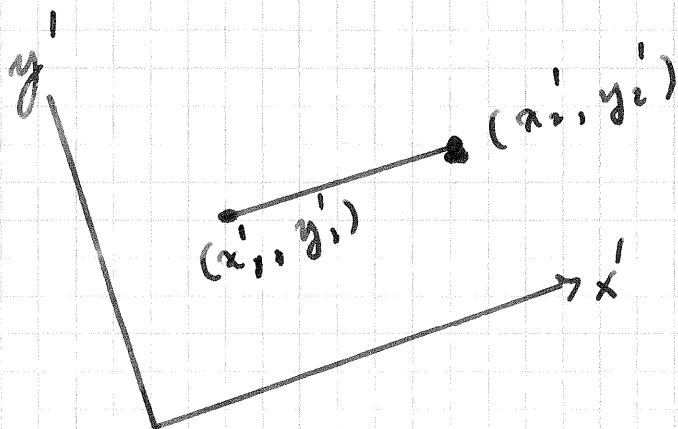
Intervallit invariant

Astanden mellom to steder på en flate:



$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \quad (= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)$$

I et annet koordinatsystem:



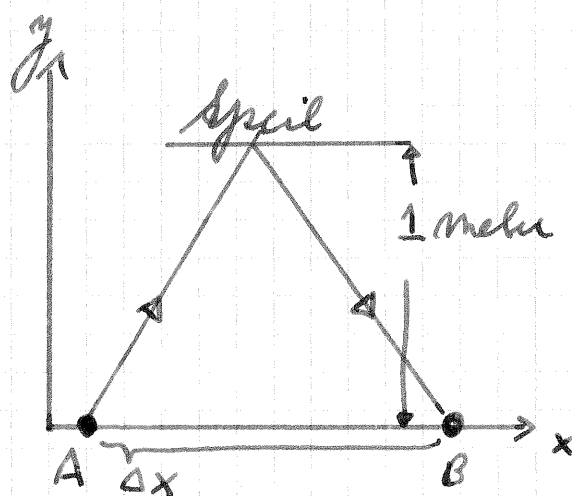
$$\Delta l^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2 \quad (= (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2)$$

Avståndet är oavhängigt av koordinat-systemet: Det är invariant

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$$

Vi ser nu på händelser i rummet.

Vi studerar följande förlopp:



Händelsen av
lysskåle
Ved $t_A = 0$.

Återkomst
av lysskåle
Ved t_B

(t, x, y)

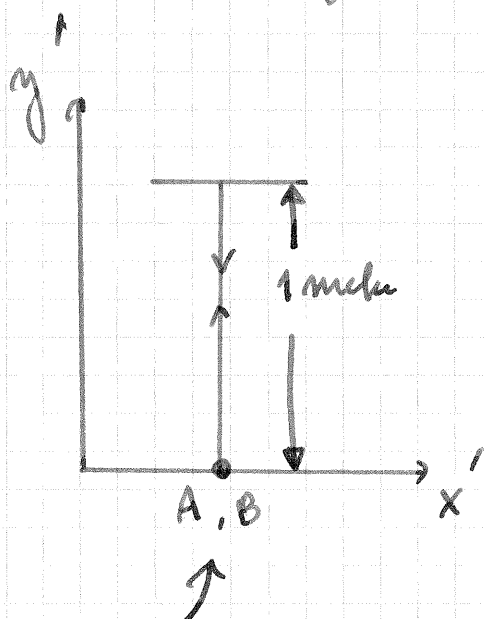
Tegnet här
kan användas.

Vi antar att detta är laboratorsystemet.

Så definerer vi et slætt system.

↑
(initial reference system)

Dette bevæger sig retlinjigt og med konstant fart i forhold til laboratorie-systemet således at hendelsesforløbet ser ud som følger:



Placering koordinaterne for A og B er de samme i dette systemet.

Altin:

I laborsystemet:

$$x_A = 0, y_A = 0, t_A = 0$$

$$x_B = x_A + \Delta x, y_A = 0, t_B = ?$$

I rockettsystemet:

$$x'_A = 0, y'_A = 0, t'_A = 0$$

$$x'_B = 0, y'_B = 0, t'_B = \underline{2 \text{ meter}}$$

fordi spillet
er én meter
fra kilden i
y-retningen.

Altin:

$$\Delta x' = x'_B - x'_A = 0$$

$$\Delta y' = y'_B - y'_A = 0$$

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = 2 \text{ meter.}$$

Har vi Δt i laboratorisystemet?

For å regnet ut dette bruker vi
postulatet:

Lysfartigheten er den samme
i alle inertielle referansesystemer.

Som en konsekvens av
Michelson - Morley
eksperimentet og
det grunnleggende postulat
i den spesielle
relativitetsteori.

I laboratorisystemet beveger lyset seg
en avstand

$$2 \left(1 + \left(\frac{v}{c} \right)^2 \right)^{1/2}$$

Lysfartigheten er i henhold til bruker 1.

Alltså,

$$\Delta t = t_B - t_A = 2 \left(1 + \left(\frac{\Delta x}{c} \right)^2 \right)^{1/2}$$

↑
Laboratorisystemet.

$$\text{Sådan } \Delta x > 0, \text{ så } \Delta t > 2 \text{ meter} \\ \underline{\hspace{10em}} = \Delta t'$$

(Husk at klokkeene i laboratorisystemet ihke er de samme som i rakettsystemet.)

Så sammenfaldt vi (og satte $\Delta x = 1 \text{ meter}$)

I laboratorisystemet:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 1 \text{ meter} \\ \Delta y &= 0 \text{ meter} \\ \Delta t &= \sqrt{5} \text{ meter} \end{aligned}$$

I rakettsystemet:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= 0 \\ \Delta y' &= 0 \\ \Delta t' &= 2 \text{ meter} \end{aligned}$$

Isa is innocent her?

På floden havde vi at

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$$

↑
Abstand

var invariant

↑
Anstand

an invariant.

J'hide comment ce que l'intervalle

Θ_m is invariant:

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2$$

Intervall

Letter min tall:

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 4 \text{ min}^2 = \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2$$

$$\begin{array}{ccc} \text{"} & & \text{"} \\ (75)^2 - 1^2 - 0^2 & & 2^2 - 0^2 - 0^2 \\ & & = 4 \text{ min}^2 \end{array}$$

11

$$(\sqrt{5})^2 - 1^2 = 0$$

$$Z^2 - O^2 - O^2$$

$$= 4 \text{ min}$$

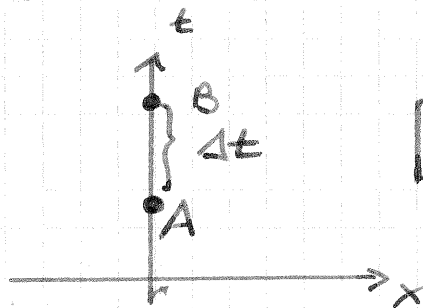
Intervallt er altid defineret som

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$



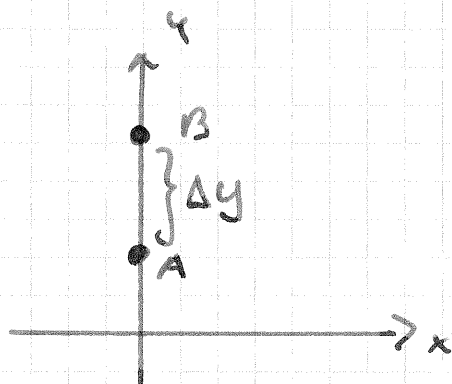
denne størrelse er altid den samme i alle inertiale referencsystemer for et givet par af hændelser.

Lad os se på at intervallet ikke er andet end tiden mellem de to hændelser i referencsystemet hvor positionen til observerne ikke ændrer sig:



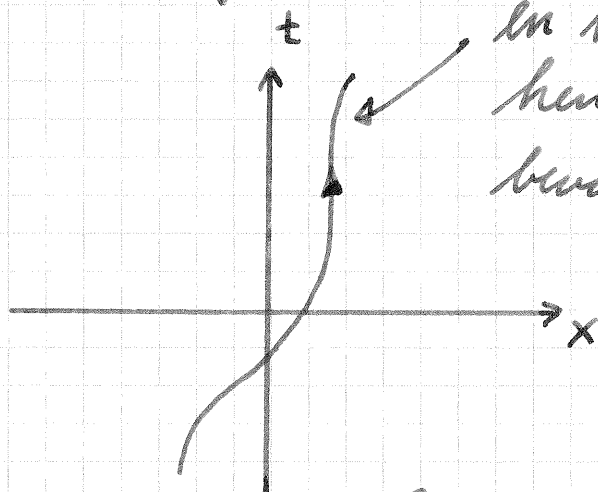
$$\Delta\tau = \Delta t$$

På samme måde erstanden mellem to steder, $\Delta l = \Delta y$ i koordinatsystemet som er orienteret slik at $\Delta x = 0$:



$$\Delta l = \Delta y$$

Verdenslinjer:



En kontinuerlig serie af hændelser, for eksempel bevægelsen til en partikel:

Hændelse: kun partiklen er.

Hvilken struktur har et sådant rom-tids diagram?

2 hændelser A og B.

Intervallt mellem dem:

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

Det er tre muligheder her:

$$\textcircled{1} \quad \Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$$

Kalles
tidlike

dette er situationen
vi skematiseret har
skudt.

$$\textcircled{2} \quad \Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = 0$$

dette implicerer at

$$\Delta x = \pm \Delta t, \text{ eller}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \pm 1.$$

Hændelserne A og B er separat på
 en slik måde at en lysstråle
 vil akkurat rkke mellem dem.

Hændelserne står da i et
lysligt forhold
 til hinanden.

(Og vi ser at klokken som
 bevæger sig med lyshastigheden
 står stille!)

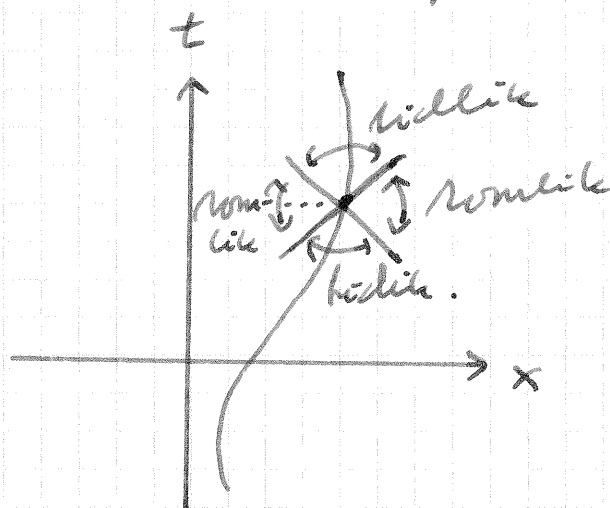
$$\textcircled{3} \quad \Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$$

Hændelserne A og B er separat
 slik at vi alltid kan finne
 et referansesystem hvor $\Delta t = 0$,
 altså det at hendelserne
 er samtidige. (Men hvor i

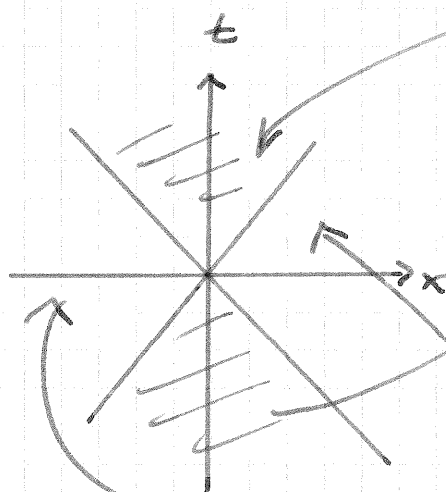
i dette systemet.)

Vi har da romlige separasjon
av hendelsene.

Alle verdenslinjer må være
tidslike - ingen ting kan gå
raskere enn lyset:



Altern:

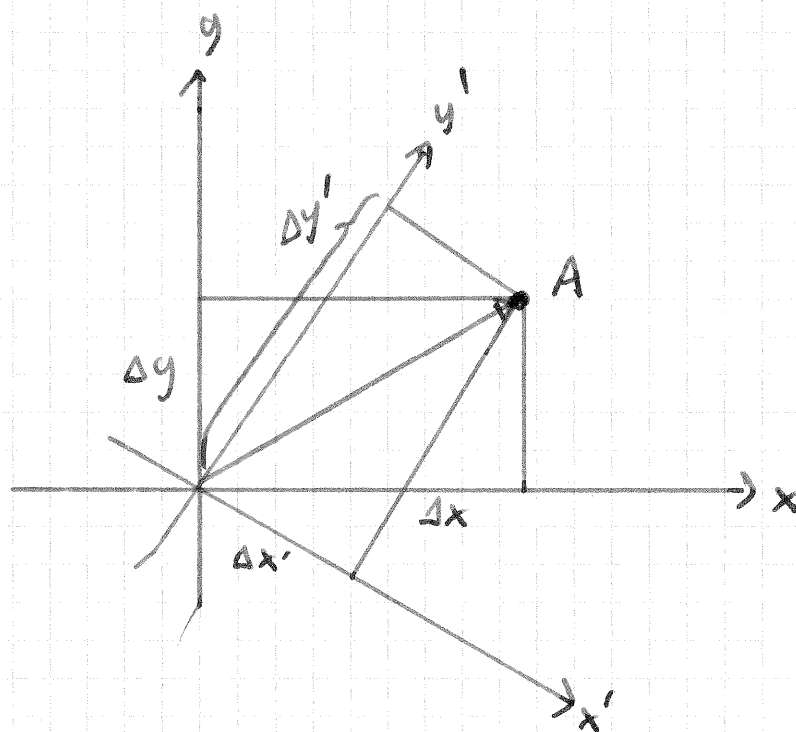


alle
hendelsene
her er
tidsluke
i forhold
til $(t=0, x=0)$

alle hendelsene
her er romsluke
i forhold til $(0,0)$

Lorentz transformasjoner

Tilbake til flaten. Vi skal nå finne problemene som knytter sammen koordinatene i to forskjellige koordinatsystemer.

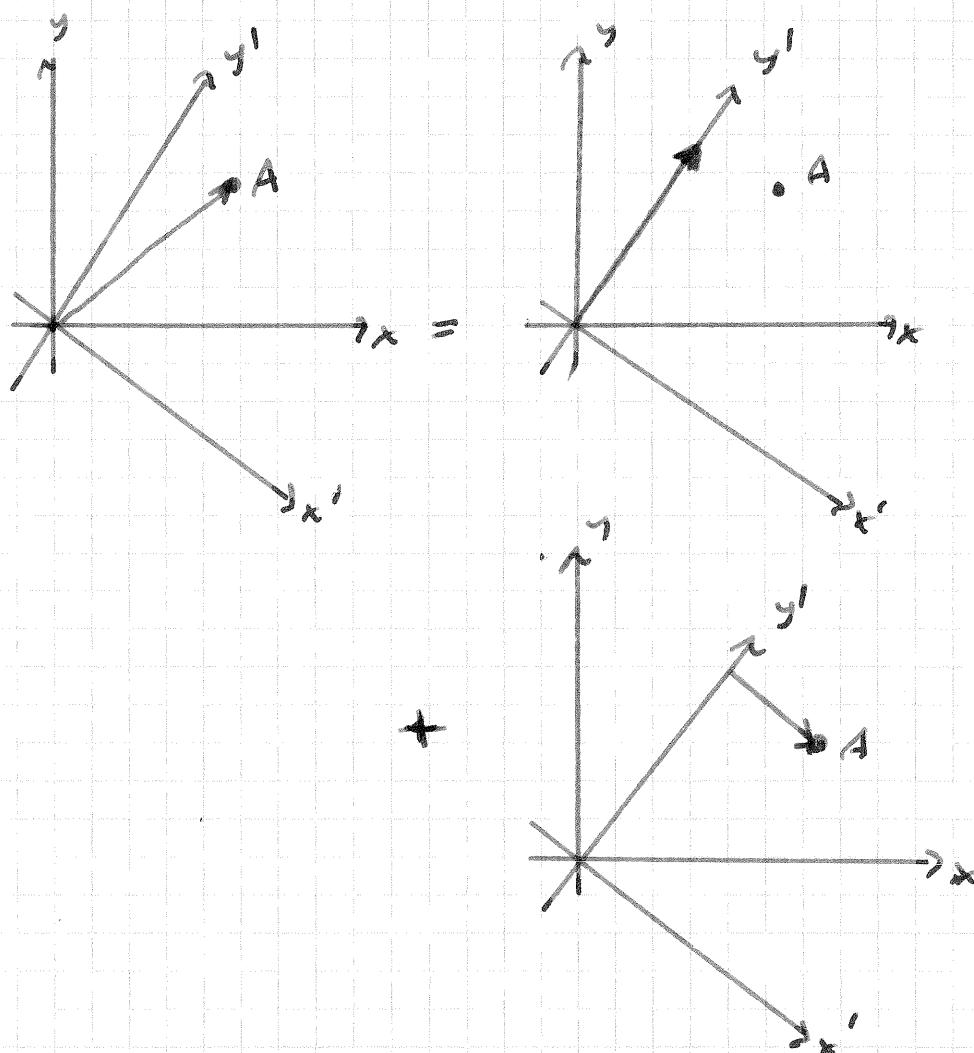


Vi skal vise at

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta x'}{\sqrt{1+s_r^2}} + \frac{s_r \Delta y'}{\sqrt{1+s_r^2}} \\ \Delta y &= -\frac{s_r \Delta x'}{\sqrt{1+s_r^2}} + \frac{\Delta y'}{\sqrt{1+s_r^2}} \end{aligned} \right\} (*)$$

Men S_1 er helningen af y' -aksen
relativt til y -aksen.

For at vise dette bruger vi vektorsaddisjon.



$$\text{Altså: } (\Delta x', \Delta y') = (0, \Delta y') + (\Delta x', 0).$$

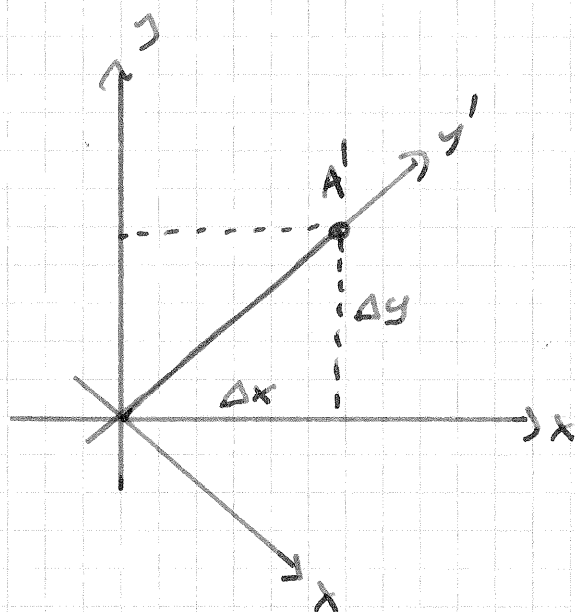
Vi bruger her at vise at (*) er samme
for hver af komponenterne til højre.

Se nu på vektoren $(0, \Delta y')$.

For denne må vi ha

$$S_r = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

(helling relativt til y-akse).



Altså:

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} = S_r^2$$

eller

$$\Delta x^2 = S_r^2 \Delta y^2$$

Avstanden fra origo til A' er den samme i begge koordinatsystemene.

Altern:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$$

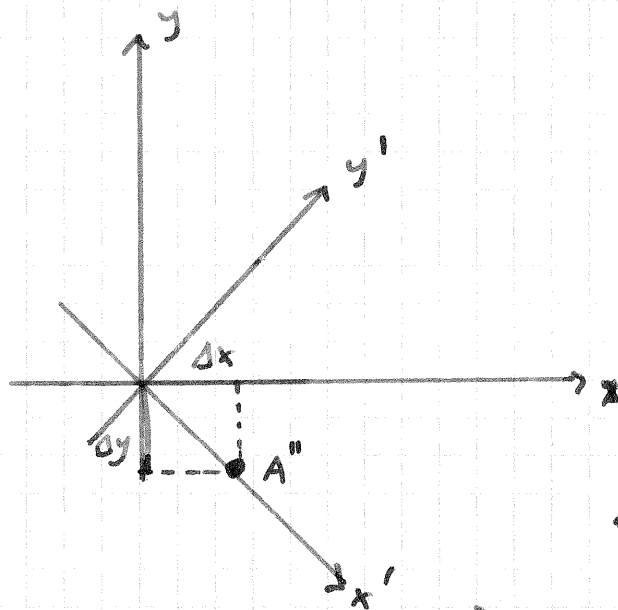
$$s_r^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 = 0 + \Delta y'^2$$

Altern er $\Delta y = \frac{\Delta y'}{\sqrt{1+s_r^2}}$ og

$$\Delta x = s_r \Delta y = \frac{s_r \Delta y'}{\sqrt{1+s_r^2}}$$

Ni ser nu på vektoren $(\Delta x', 0)$.

På samme måde som tidligere



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -s_r$$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta x'^2 + 0$$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x' / \sqrt{1+s_r^2}$$

$$\Delta y = -s_r \Delta x' / \sqrt{1+s_r^2}$$

Vi lægger sammen resultaterne af (*)
 og (1).

Lorentz - transformeringene
 knytter sammen rum og tid - koordinaterne
 i to forskellige inertialsystemer.

Vi har to inertialsystemer hvor
 det ene ligger i ro i forhold til
 os) og det andet bevæger sig
 med konstant hastighed v i
 forhold til os.

⚡

En hendelse sker i $(t=t'=0$ og
 $x=x'=0)$, en anden sker i A i
 vilkårlig afstand fra 0.

Koordinaterne til A : $(\Delta t, \Delta x)$

Ni dele opp som for flat tilfellet:

$$(\Delta t', \Delta x') = (0, \Delta x') + \underbrace{(\Delta t', 0)}_{\text{Vi kan gjøre denne frikt.}}$$

Vi kan gjøre denne frikt.

$(\Delta t', 0)$:

$$v_r = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Relativ hastighet til referansesystemene.

$$\Rightarrow \Delta x^2 = v_r^2 \Delta t^2$$

Intervallts invarians:

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 = \Delta t'^2 - \underbrace{\Delta x'^2}_{=0} = \Delta t'^2$$

$$\Delta t^2 - v_r^2 \Delta t^2 = \Delta t'^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta t = \frac{\Delta t'^2}{\sqrt{1-v_r^2}} \\ \Delta x = \frac{v_r \Delta t}{\sqrt{1-v_r^2}} \end{array} \right.$$

Så kan vi for oss:

$$\underline{(0, \Delta x'):$$

$$v_r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$



Intervallet är som likt.

$$\Delta t = v_r \Delta x$$

Intervallens invarians:

$$\Delta t^2 - \Delta x^2 = -\Delta x'^2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Delta x^2 - \Delta t^2}_{\Delta x^2(1 - v_r^2)} = \Delta x'^2$$

$$\Delta x^2(1 - v_r^2) = \Delta x'^2 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - v_r^2}} \\ \Delta t = v_r \Delta x = \frac{v_r \Delta x'}{\sqrt{1 - v_r^2}} \end{array} \right.$$

Ni sette dette sammen og får:

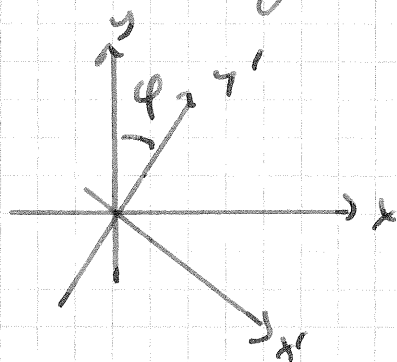
$$\begin{cases} \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v_r^2}} + \frac{v_r \Delta x'}{\sqrt{1-v_r^2}} \\ \Delta x = \frac{v_r \Delta t'}{\sqrt{1-v_r^2}} + \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-v_r^2}} \end{cases}$$

Dette er Lorentz transformasjonen.

Hastighetsparameter θ

Fluke: $\Delta l^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$

Impuls vinkel φ :



~~$$\Delta l^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$$~~

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\Delta x = \Delta l \sin \varphi$$

$$\Delta y = \Delta l \cos \varphi$$

$$1 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi$$

På samme måte kan vi introdusere en parameter Θ for å beskrive nitidvaller:

$$\Delta \tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\Delta t = \Delta \tau \cosh \Theta$$

$$\Delta x = \Delta \tau \sinh \Theta$$

$$\Delta \tau^2 = \Delta \tau^2 \cosh^2 \Theta - \Delta \tau^2 \sinh^2 \Theta$$

$$\Leftrightarrow$$

$$1 = \cosh^2 \Theta - \sinh^2 \Theta$$

Helmingsen som ble definert på side 302 for glatte problemet er:

$$S_r = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \tan \varphi.$$

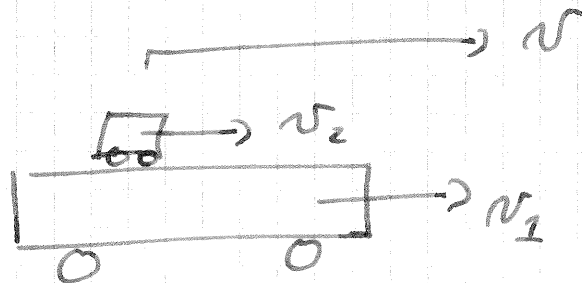
På samme måte blir hastigheten i initial systemet

$$N_r = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \tanh \Theta$$

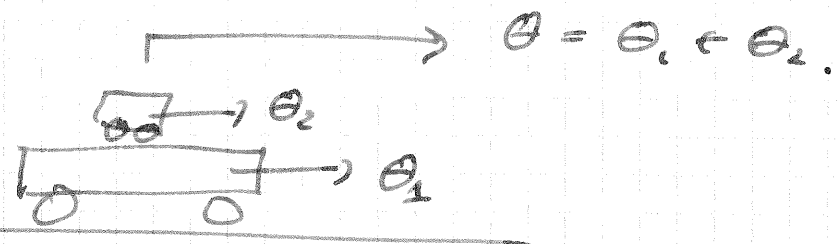
Kuidas additsiooni kiiruste
relatiiviteet?

Newtoni kinematika:

$$v = v_1 + v_2$$



Relatiivistiline kinematika:



$$v_1 = \tanh \theta_1$$

$$v_2 = \tanh \theta_2$$

Beltrami

$$\underline{v} = \tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh \theta_1 + \tanh \theta_2}{1 + \tanh \theta_1 \tanh \theta_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

Alternativ:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$$

$$\text{falls } v_1 \ll 1, \\ v_2 \ll 1$$

$$v \approx v_1 + v_2$$

Ähnliche in
Newton'scher
Mechanik.

Relativistische dynamik.

$$m^2 \cdot |\Delta \tau|^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

↑
man in System mit $\Delta x = 0$.

$$m^2 \Delta \tau^2 = m^2 \Delta t^2 - m^2 \Delta x^2$$

$$m = m^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau} \right)^2 - m^2 \left(\frac{\Delta x}{\Delta \tau} \right)^2$$

↑
Ruhemasse

↑
Energie

↑
moment.

$$m^2 = E^2 - p^2$$

La oss studere energien litt
nærmere:

$$E = m \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$$

Vi bruker Lorentz transformasjonen
på side 307:

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-v_r^2}}$$

$$(\Delta t' = \Delta \tau, \Delta x' = 0)$$

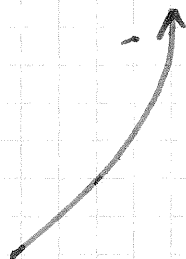
$$\text{Altså: } E = m \frac{\Delta \tau}{\Delta \tau \sqrt{1-v_r^2}} = m / \sqrt{1-v_r^2}$$

La oss anta $v_r \ll 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v_r^2}} = 1 + \frac{1}{2} v_r^2 + \dots$$

Da har vi for energien:

$$E \approx m + \frac{1}{2} m v_r^2 + \dots$$



kinetisk energi

hvilemasse.

Sette vi min $c = 300000000 \text{ km/s}$
 slik at tid igjen måles i sekunder,
 får vi:

$$m^2 c^4 = E^2 - (pc)^2$$

Relativistisk ligning av E gir

$$E = mc^2 + \frac{1}{2} m v_r^2 + \dots$$

Når $v_r = 0 \Rightarrow$

$E = mc^2$