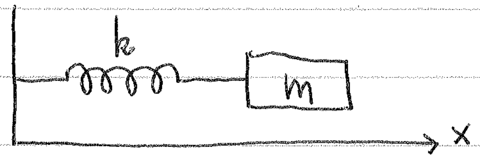
Repetisjon 29.11.06

I. Svingninger

Udempet:



$$F = ma \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad (\omega^2 = k/m)$$

Løsning: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

evt. $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$

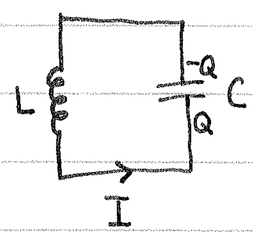
$\{A, \varphi\}$ evt $\{B, C\}$ fastlegges fra 2 initialbetingelser, f.eks. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$

A = amplitude; ω = vinkelfrekvens; φ = fasekonstant;
$f = \omega/2\pi$ = frekvens; $T = 1/f$ = periode

Kinetisk energi: $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$
Potensiell —"—: $E_p = -\int_0^x F\,dx = \frac{1}{2}kx^2$

Total energi: $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$ (= konstant)

Elektrisk analogi:

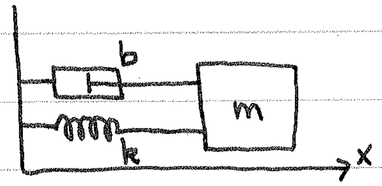


$$L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0\cos(\omega t + \varphi) \qquad (\omega^2 = 1/LC)$$

Analoge størrelser: $x \leftrightarrow Q$; $\dot{x} \leftrightarrow I$; $k \leftrightarrow 1/C$;
$m \leftrightarrow L$

Dempet:



$$F = -kx - b\dot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Overdempet: $\delta \equiv b/2m > \omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$

$$x(t) = A e^{-(\delta+\gamma)t} + B e^{-(\delta-\gamma)t}$$

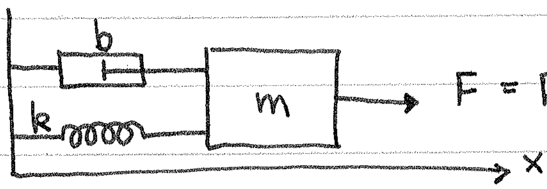
Underdempet: $\delta < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) \qquad \left(\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)$$

Kritisk damping: $\delta = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\delta t} + B t e^{-\delta t}$$

Tvungen svingning, resonans:



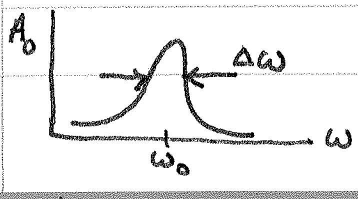
$$F = F_0 \cos \omega t$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \approx x_p(t)$ hvis $t \gg \delta$ (fordi $x_h \sim e^{-\delta t}$)

$$x_p(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (b\omega/m)^2}} \; ; \quad \tan \varphi_0 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega b/m}$$



Resonans (max A_0) ved $\omega \approx \omega_0$

Halvverdibredde: $\Delta\omega$

II. Bølger

Bølge = forplantning av svingning og forpl. av energi og impuls, men ikke forpl. av masse

Longitudinal bølge : svingeretning = forpl.retn.
Transversal —"— : —"— $\perp$ —"—

Harmonisk bølge: $\xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$

= utsving i pos. x ved tid t

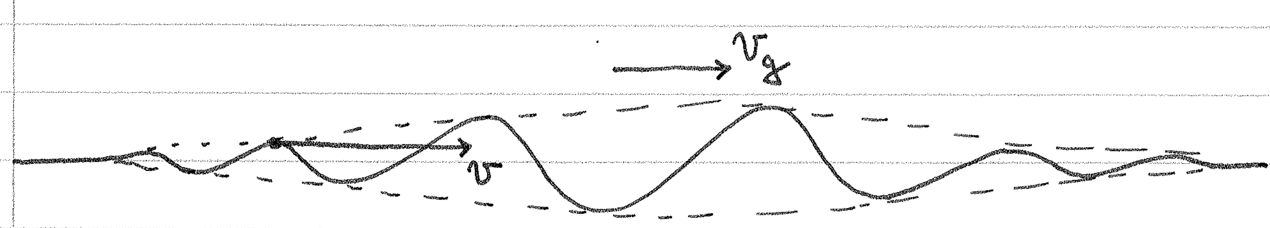
ξ_0 = amplitude ; ω = vinkelfrekvens ; k = bølgetall ;
$\lambda = 2\pi/k$ = bølgelengde ; $\nu = \omega/2\pi$ = frekvens ; $T = 1/\nu$ = periode

$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$ = fasehastigheten

$v_p = \frac{d\xi}{dt}$ = partikkelhastigheten

Dispersjon : v avhenger av ω $\Rightarrow$ ω ikke lineært avhengig av k

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$ = gruppehastigheten = hastigheten til bølgepakke satt sammen av flere harmoniske bølger



Ligning som beskriver bølger uten dispersjon og demping:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}}$$ Bølgeligning (i 1 dim.)

Generell løsning: $\xi(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\substack{\text{forpl. seg i} \\ \text{pos. x-retn.}}} + \underbrace{g(x+vt)}_{\substack{\text{forpl. seg i} \\ \text{neg. x-retn.}}}$

Superposisjonsprinsipp: ξ_1 og ξ_2 løsninger av bølgeligr.

$\Rightarrow \xi = \xi_1 + \xi_2$ også løsn. av bølgeligr.

Vi har utledet at bølgeligr. oppfylles av:

- transversalt utsving på streng ($v = \sqrt{S/\mu}$; S = strekk-kraft, μ = masse pr lengdeenhet)
- "masse - fjær - transmisjonslinje" (modell for longitudinale bølger som lydbølger, i gass, væske, fast stoff)
  $v = \sqrt{\text{elastisk modul / massetetthet}}$
- lydbølger i tynn stang ($v = \sqrt{Y/\rho}$; Y = Youngs modul, ρ = masse pr volumenhet)
- lydbølger i væsker ($v = \sqrt{B/\rho}$; B = bulkmodulen)
- lydbølger i gasser ($v = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{\gamma P/\rho} = \sqrt{\gamma k_B T/m}$; γ = adiabatkonstanten, P = trykket, T = temperaturen, m = molekylmassen, k_B = Boltzmanns konstant)

ξ

Midlere energi pr lengdeenhet i 1-dim. harmonisk bølge

(i 1-dim. system): $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$

(pr. volumenhet i 3-dim. —"—): $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$

Midlere overført effekt: $P = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$ (1-dim. system)

Midlere impuls pr lengdeenhet i 1-dim system: $\bar{\pi} = \bar{\varepsilon}/v$

(pr volumenhet i 3-dim. —"—)

Intensitet I = midlere effekt pr flateenhet (3-dim. system)

$$I = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v$$

Faktor ½ kommer hele tiden fra midling av $\cos^2(kx-\omega t)$, over bølgelengde λ:

$$\overline{\cos^2(kx-\omega t)} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \cos^2(kx-\omega t)\,dx = 1/2$$

eller over periode T:

$$\langle\cos^2(kx-\omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)\,dt = 1/2$$

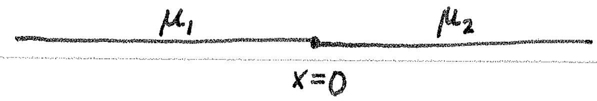
Desibelskalaen:

$$\beta\ (dB) = 10\log(I/I_0) \quad \text{med } I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$$

Refleksjon, transmisjon:

Grenseflate (3D), evt "grensepunkt" (1D) mellom to medier $\Rightarrow$ innkommende bølge blir delvis reflektert og delvis transmittert.

Bølge på streng:



$x<0: \; \xi = \xi_i + \xi_r \qquad\qquad x>0: \; \xi = \xi_t$

krav om kontinuerlig ξ og $\partial\xi/\partial x$ i $x=0$ fastlegger ξ_r og ξ_t for gitt ξ_i (ξ_i = innkommende bølge)

$\Rightarrow \xi_{r0} = r\,\xi_{i0} \; , \quad \xi_{t0} = t\,\xi_{i0}$

med $r = \dfrac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \; , \quad t = \dfrac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}$

$T = P_t/P_i = \dfrac{4\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{(\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1})^2}$ = transm. koeff.

$R = P_r/P_i = 1 - T$ = refl. koeff.

Plan lydbølge mot grenseflate mellom medier 1 og 2:

$T = 4\sqrt{\rho_1 B_1 \rho_2 B_2} \,/\, (\sqrt{\rho_1 B_1} + \sqrt{\rho_2 B_2})^2 \; ; \quad R = 1 - T$

Bølger i flere dimensjoner:

Bølgefront = flate med konstant fase

Plan bølge: $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi)$

$\hat{k} = \vec{k}/|\vec{k}| = \vec{k}/k$ = enhetsvektor i bølgens forpl. retn.

Kulebølge: $\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t + \varphi)$

$\hat{k} = \hat{r}$ (forpl. i radiell retning)

Sylinderbølge: $\xi(r,t) \sim \xi_0/\sqrt{r}$

$\hat{k} = \hat{r} \perp \hat{z}$ (forpl. $\perp$ sylinderaksen)

[Energibevarelse $\Rightarrow$ kulebølge $\sim 1/r$ og sylinderbølge $\sim 1/\sqrt{r}$]

Stående bølger:

Resonansfenomen! Interferensfenomen!

Grensebetingelser $\Rightarrow$ kun bestemte bølgelengder λ_n mulig.

Eks: Streng fast i begge ender $\Rightarrow \lambda_n = 2L/n$

Lydbølger i rør, lukket ende : $\xi = 0$

åpen ende : $\Delta p = 0$

Dopplereffekt:

Bølgekilde S og observatør O i relativ bevegelse

$\Rightarrow O$ måler $\nu' \neq \nu$ sendt ut av S

$$\boxed{\nu' = \frac{v - v_O}{v - v_S}\,\nu}$$

O bort fra S $\Rightarrow$ v_O positiv

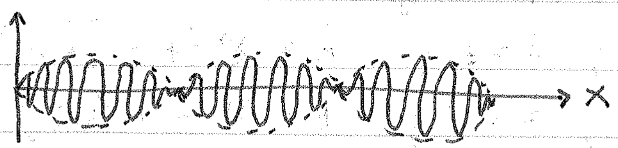
S mot O $\Rightarrow$ v_S positiv

Sjokkbølger:

$v_S > v$ $\Rightarrow$ stor tetthet av bølgefronter når fram til O plutselig

Svevning: $\xi_1 = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$; $\xi_2 = \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$

$$\Rightarrow \xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$



$$I \sim |\xi|^2 \sim \cos^2\left(\frac{k_2-k_1}{2}x - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)$$

Sveveperiode: $T_S = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ Svevefrekvens: $\nu_S = \nu_2 - \nu_1$

<u>Elektromagnetiske bølger</u>

Maxwells ligninger $\Longrightarrow$ Bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial^2 \vec{E}/\partial t^2 \quad ; \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \partial^2 \vec{B}/\partial t^2$$

$$\Rightarrow v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c$$

Harmonisk e.m. bølge: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

Fra Maxwells ligninger: $\vec{E} \perp \vec{k}$ og $\vec{B} \perp \vec{k}$ og $\vec{B} \perp \vec{E}$

$\Rightarrow$ e.m. bølger er <u>transversale</u> ($\hat{k}$ = forpl.retn.)

$\boxed{\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}}$ $\quad$ $\boxed{E = \frac{\omega}{k} B = c B}$

Grenseflatebetingelser: $\boxed{\Delta E_{\parallel} = 0}$ $\quad$ $\boxed{\Delta B_{\perp} = 0}$

$\left(\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}; \ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}\right)$ $\boxed{\Delta D_{\perp} = 0}$ $\quad$ $\boxed{\Delta H_{\parallel} = 0}$

Energi pr volumenhet: $u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E^2$

Intensitet: $I = v \cdot \bar{u} = c\,\varepsilon_0 \overline{E^2}$

Poyntings vektor: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow S = |\vec{S}| = c\varepsilon_0 E^2$

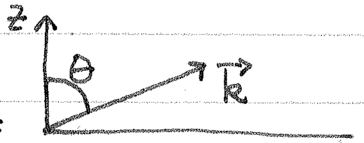
$\Rightarrow I = \bar{S} = \langle S \rangle \qquad [\langle \vec{S} \rangle = I\hat{k}]$

Impuls pr volumenhet: $\underline{\pi = u/c} = \mu_0 \varepsilon_0 S \Rightarrow \vec{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{S} = \frac{S}{c^2}\hat{k}$

Stråling:

Akselererte ladninger sender ut e.m. bølger (<u>stråling</u>)

Eks: oscillerende dipoler $\vec{p}(t)$ eller $\vec{m}(t)$



$\vec{p} = p \cdot \hat{z}$

(evt. $\vec{m} = m\hat{z}$)

$I(\theta) \sim \sin^2\theta$

$I(\omega) \sim \omega^4 \Rightarrow$ Blå himmel, rød solnedgang/-oppgang

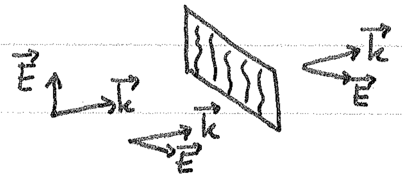
Polarisering:

Lineærpol: $\vec{E} = \hat{y} E_0 \cos(kx - \omega t)$

Sirkulærpol: $\vec{E} = \hat{y} E_0 \cos(kx - \omega t) + \hat{z} E_0 \sin(kx - \omega t)$

Elliptisk pol: $\vec{E} = \hat{y} E_0 \cos(kx - \omega t) + \hat{z}\, \alpha E_0 \sin(kx - \omega t) \quad (\alpha \neq 1)$

Ideelt polarisasjonsfilter:



Filter i vinkel θ i forhold til $\vec{E}$ $\Rightarrow$ transmittert intensitet
$= I_0 \cos^2\theta$ (Malus' lov)

Bølgeligning for $\vec{E}$ og $\vec{B}$ i "stoff" (med $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$):

$\nabla^2 \vec{E} = \mu\varepsilon \, \partial^2 \vec{E}/\partial t^2$; $\nabla^2 \vec{B} = \mu\varepsilon \, \partial^2 \vec{B}/\partial t^2$

$\Rightarrow v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = c/n$; $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$ = brytningsindeksen

Hvis $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$, er $v = v(\omega) \Rightarrow$ dispersjon!

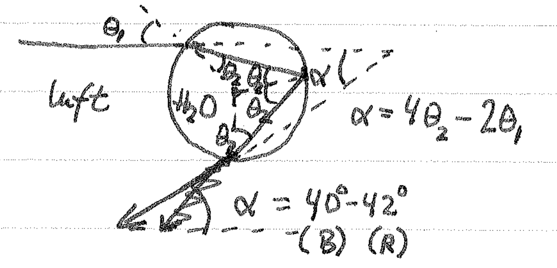
Refleksjon, transmisjon av e.m. bølger:

Normalt innfall: $T = 4 n_1 n_2 / (n_1 + n_2)^2$; $R = 1 - T$

Skrått innfall: $\left.\begin{array}{l} \vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t \text{ i samme plan} \\ \theta_i = \theta_r \\ n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \end{array}\right\}$ = Geometrisk optikk

Total indre refleksjon hvis $\theta_i > \arcsin(n_2/n_1)$ [Optisk fiber]

Dispersjon, $n(\omega)$, gir regnbue:



Fermats prinsipp: Lys tar vei som tar kortest tid. ("Variasjons-prinsipp")

Huygens' prinsipp: Alle punkter i bølgefront opphav til nye "småbølger" (kulebølger). Ny bølgefront = overflatetangent til disse småbølgene

Interferens:

Forsterkning / utslokning av intensitet pga superposisjon av to eller flere bølger.

Bølger <u>i fase</u> $\Rightarrow$ konstruktiv interferens

Bølger <u>i motfase</u> $\Rightarrow$ destruktiv — " —

Koherens:

Bølgekilder med fast, tidsuavhengig sammenheng mellom sine faser er <u>koherente</u>:

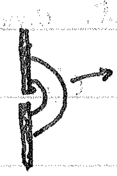
$\xi_1 = \xi_0 \sin \alpha_1$; $\xi_2 = \xi_0 \sin \alpha_2$ $\quad \Delta\phi = \alpha_2 - \alpha_1$ uavh. av t

Inkoherente kilder: $\Delta\phi = \Delta\phi(t)$

Diffraksjon:

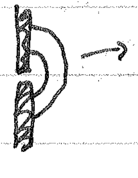
Spredning av bølger som passerer kanter, hjørner, spalter, hull osv. Resulterende bølge bestemmes som regel med Huygens' prinsipp. Eks:

Tynn spalte:



sylinderbølge (halv)

Sirkulært hull:



kulebølge (halv)

To tynne spalter: $I(\theta) = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{kd \sin\theta}{2}\right)$

N — " — : $I(\theta) = I_0 \dfrac{\sin^2(Nkd \sin\theta/2)}{\sin^2(kd \sin\theta/2)}$

En spalte, bredde a: $I(\theta) = \hat{I} \sin^2(\pi a \sin\theta/\lambda) / (\pi a \sin\theta/\lambda)^2$

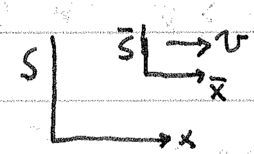
N spalter, bredde a : $I = \hat{I} \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 \left[\frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}\right]^2$

$\beta = \pi a \sin\theta/\lambda \qquad \phi = 2\pi d \sin\theta/\lambda$

III. Spesiell relativitetsteori

Einsteins 2 postulater: 1. Relativitetsprinsippet 2. "c = konstant"

→ Konsekvenser:

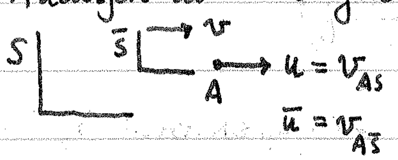


- Relativitet av samtidighet
- Tidsdilatasjon: $\Delta t = \gamma \Delta \bar{t}$ $\qquad \gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \geq 1$
- Lengdekontraksjon: $\Delta x = \Delta \bar{x} / \gamma$ (kun parallelt med $\vec{v}$)
- Lorentztransformasjonene (felles origo ved $t = \bar{t} = 0$):

$\bar{x} = \gamma(x - vt)$; $\bar{y} = y$; $\bar{z} = z$; $\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$

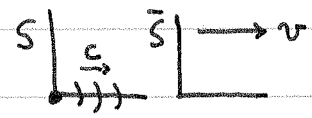
$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$; $y = \bar{y}$; $z = \bar{z}$; $t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$

- Addisjon av hastigheter:



$u = \frac{\bar{u} + v}{1 + \bar{u}v/c^2} \qquad \bar{u} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$

- Dopplereffekt for e.m. bølger:



$\bar{\nu} = \nu \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \overset{v \ll c}{\approx} \nu(1 - v/c)$

- Relativistisk impuls: $\vec{p} = m\vec{\eta} = \gamma m \vec{v}$ $\left(\vec{\eta} = dx/d\bar{t} = \text{egenhastighet}\right)$
- —"— energi: $E = \gamma mc^2$
- Hvileenergi: $E_0 = mc^2$ Kinetisk energi: $E_k = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$
- Bevaringslover: For lukket system er E og $\vec{p}$ bevart.
- Sammenheng E, p, m: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$
- Elastisk prosess: E, p, E_k og m bevart
- Uelastisk —"— : E, p bevart