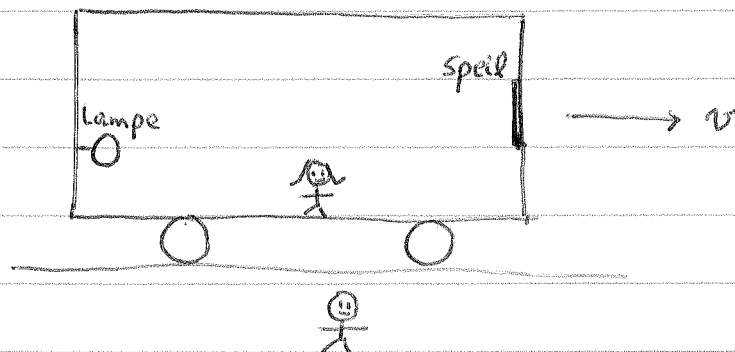


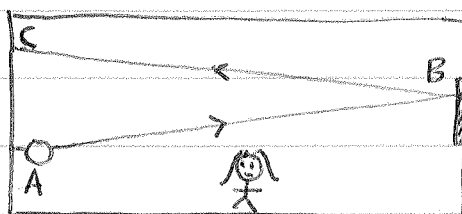
Lengdekonsentrasjon (LL 12.4, TM 39,3)



Hendelser:

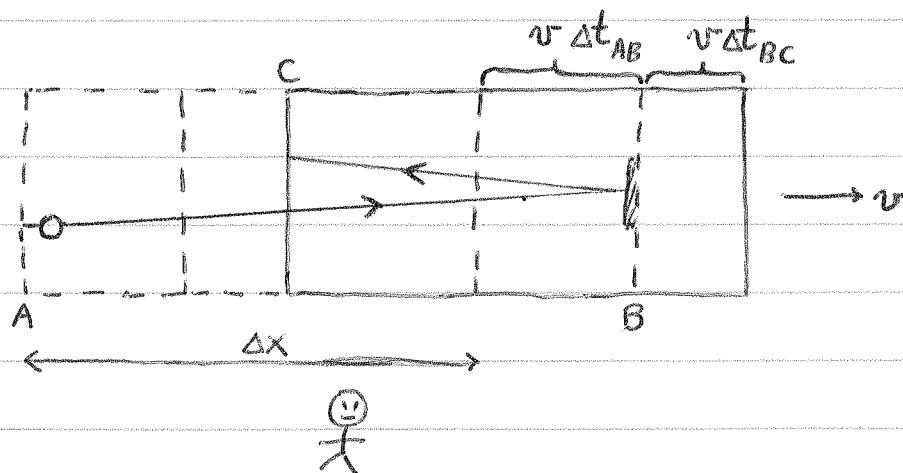
- A lyset slås på
- B lyset reflekteres i speilet
- C lyset treffer bakveggen

Siv:



$$\Delta \bar{t}_{AC} = 2 \frac{\Delta \bar{x}}{c}, \quad \Delta \bar{x} = \frac{1}{2} c \Delta \bar{t}_{AC}$$

Sam:



$$\Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c} + \frac{v \Delta t_{AB}}{c}, \quad \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c} - \frac{v \Delta t_{BC}}{c}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{AB} = \frac{\Delta x}{c-v}, \quad \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x}{c+v}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta t_{AC} &= \Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} = \frac{\Delta x(c+v) + \Delta x(c-v)}{c^2 - v^2} = \frac{2\Delta x \cdot c}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{2\Delta x}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} c \Delta t_{AC} (1 - v^2/c^2)$$

Tidsdilatasjon $\Rightarrow \Delta \bar{t}_{AC} = \Delta t_{AC} \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta \bar{x} &= \frac{1}{2} c \Delta \bar{t}_{AC} = \frac{1}{2} c \Delta t_{AC} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{2\Delta x}{c} \cdot \frac{1}{1 - v^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \Delta x \end{aligned}$$

Et objekt er lengst i det inertialsystemet hvor objektet er i ro.

eller:

Objekter i bevegelse krymper^(*)
(i den retning bevegelsen foregår).

(*)

Vogne i bevegelse i forhold til Sam

$$\Rightarrow \text{Sam ser krympet vogn, } \Delta x = \sqrt{1 - v^2/c^2} \Delta \bar{x} < \Delta \bar{x}$$

Egentiden ("proper time") er tiden målt mellom to hendelser av blokke i ro i ref. system der hendelsene skjer i faste rompunkter. Tiden mellom de to hendelsene målt i alle andre ref. system er alltid lengre enn egentiden.

Egenlengden ("proper length") er lengden målt i ref. system der objektet er i ro. Objektets lengde målt i alle andre ref. system er alltid kortere enn egenlengden.

Ingen lengdekontraksjon normalt på $\vec{v}$, kun parallelt med $\vec{v}$:

Hendelser:

A Sam setter blå strek i høyde $\Delta y = 1\text{m}$ over bakken. (På f.eks. en husvegg)

B Siv setter rød — " — $\Delta \bar{y} = 1\text{m}$ — " —. (På samme vegg.)

Hvis kontraksjon i y-retning (av objekt i beregelse i x-retning):

Sam vil si at rød strek er nederst.

Siv vil si at blå — " —. (For Siv bereger veggen seg!)

Sam og Sivs påstand er like gode da begge er i inertialsystemer.

⇒ Kun én mulighet: rød og blå strek like høyt på veggen,
 $\Delta y = \Delta \bar{y}$, ingen kontraksjon $\perp \vec{v}$

Lorentztransformasjonene ("LT") (LL 12.2, TM 39.3)

(H.A. Lorentz 1904; Einstein 1905)

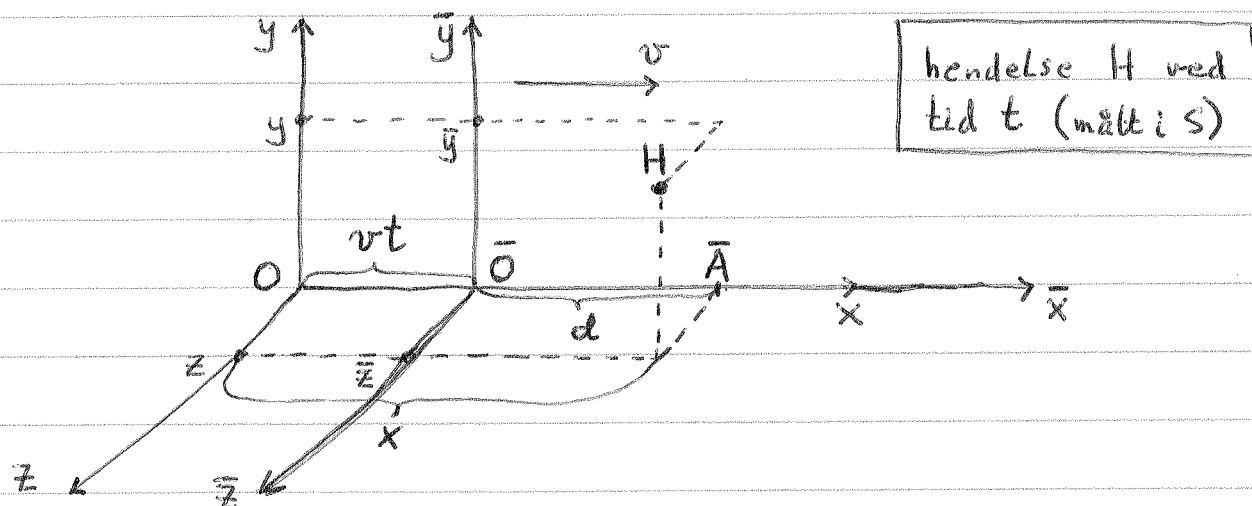
Hendelse: noe som skjer i bestemt posisjon ved bestemt tid

Hendelse i S : (x, y, z, t)

— " — $\bar{S}$: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$

LT angir sammenhengen mellom (x, y, z, t) og $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ for en og samme hendelse (H).

Antar $\vec{v} = v \hat{x}$, samt felles origo, $\bar{O} = O$, ved $t = 0$:



$$\left. \begin{aligned} \text{Galileo: } H_x &= \bar{O}\bar{A} + O\bar{O} = d + vt = x \\ H_{\bar{x}} &= \bar{O}\bar{A} = d = \bar{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{x} = x - vt$$

$$H_y = H_{\bar{y}} \Rightarrow \bar{y} = y$$

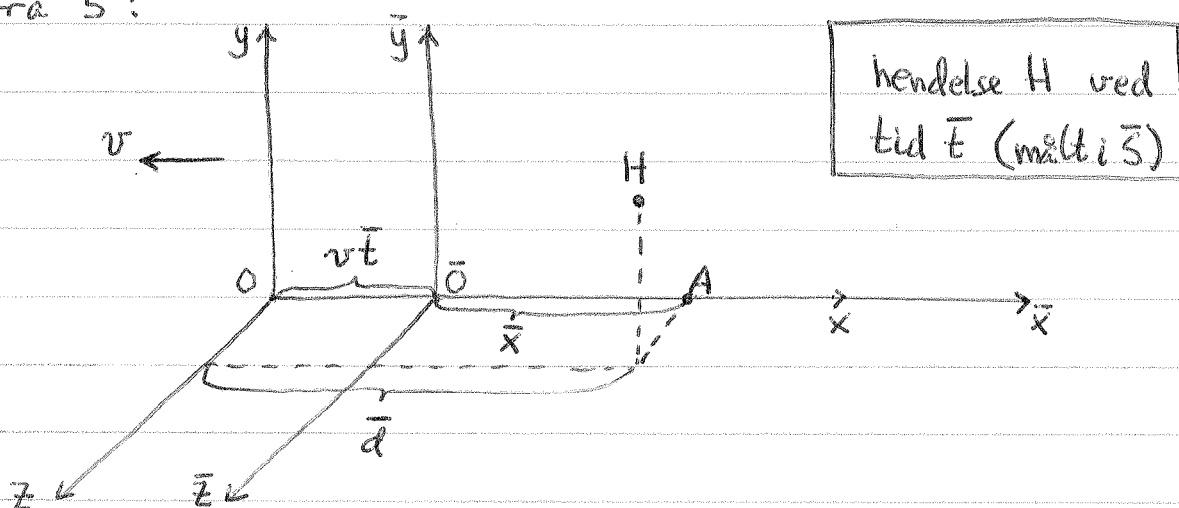
$$H_z = H_{\bar{z}} \Rightarrow \bar{z} = z$$

$$H_t = H_{\bar{t}} \Rightarrow \bar{t} = t \quad (\text{"Hva ellers?!"})$$

Einstein: $\left. \begin{array}{l} d = \bar{O}\bar{A} \text{ målt i } \bar{S} \\ \bar{x} = \bar{O}\bar{A} \text{ målt i } \bar{S} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{x} = \frac{d}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \cdot d$
 (pga lengdekompresjon)
 (ders: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \text{"lorentzfaktoren"}$)

Dermed: $x = d + vt = \frac{\bar{x}}{\gamma} + vt \Rightarrow \bar{x} = \gamma(x - vt)$

Sett fra $\bar{S}$:



$\left. \begin{array}{l} \bar{d} = OA \text{ målt i } \bar{S} \\ x = OA \text{ målt i } S \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\bar{d}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma \bar{d}$
 (igjen: pga lengdekompresjon)

Dermed: $\bar{x} = \bar{d} - v\bar{t} = \frac{x}{\gamma} - v\bar{t} \Rightarrow x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$

[Som ventet...]

Eliminerer $\bar{x}$ (for å finne $\bar{t}(x, t)$):

$x = \gamma \left\{ \gamma \bar{x} - \gamma vt + v\bar{t} \right\} \Rightarrow \frac{x}{\gamma} - \gamma x + \gamma vt = v\bar{t}$

$\Rightarrow \bar{t} = \gamma t - \gamma x \frac{1 - 1/\gamma^2}{v} = \gamma t - \gamma x \frac{1 - (1 - v^2/c^2)}{v} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$

Ingen kontraksjon $\perp \vec{v}$ $\Rightarrow y = \bar{y}$ og $z = \bar{z}$.

Dermed:

Hendelse i $\bar{S}$ (som har hastighet $v\hat{x}$ i forhold til S) uttrykt ved hendelse i S :

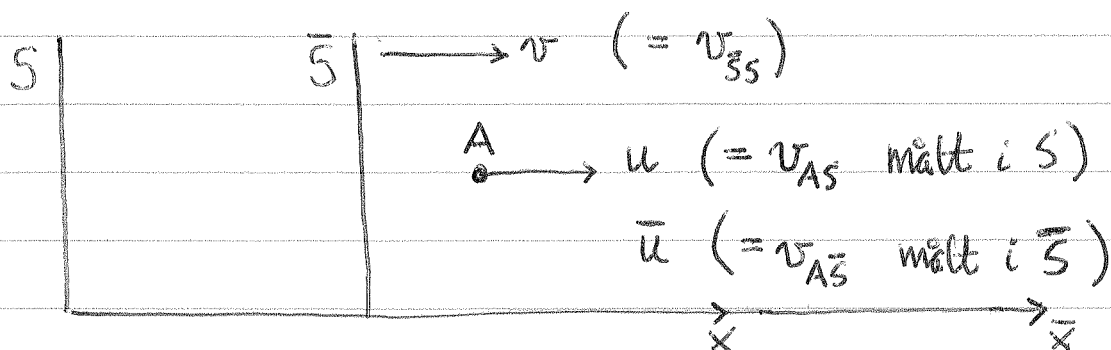
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \gamma(x - vt) \\ \bar{y} &= y \\ \bar{z} &= z \\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

Hendelse i S (som har hastighet $-v\hat{x}$ i forhold til $\bar{S}$) uttrykt ved hendelse i $\bar{S}$:

$$\begin{aligned}x &= \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) \\ y &= \bar{y} \\ z &= \bar{z} \\ t &= \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)\end{aligned}$$

der $\gamma \equiv \{1 - v^2/c^2\}^{-1/2}$

Relative hastigheter (LL 12.3, TM 39.5)



Galileo: $u = \bar{u} + v$ ($v_{AS} = v_{A\bar{S}} + v_{\bar{S}S}$)

Einstein: $u = dx/dt$

$$\bar{u} = d\bar{x}/d\bar{t}$$

der $d\bar{x} = \gamma(dx - v dt)$

$$d\bar{t} = \gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{\gamma(dx - v dt)}{\gamma(dt - \frac{v}{c^2} dx)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Eller:

$$u = \frac{\gamma(d\bar{x} + v d\bar{t})}{\gamma(d\bar{t} + \frac{v}{c^2} d\bar{x})} = \frac{\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}} = \frac{\bar{u} + v}{1 + \frac{\bar{u}v}{c^2}}$$

$$\left(v_{AS} = \frac{v_{A\bar{S}} + v_{\bar{S}S}}{1 + \frac{v_{A\bar{S}} v_{\bar{S}S}}{c^2}} \right)$$